

INDICE

1.-APROXIMACIÓN DE FUNCIONES MEDIANTE SERIES

- 1.1.-POLINOMIOS DE TAYLOR
- 1.2.-SERIES DE FOURIER
- 1.3.-SERIES DE CHEBYSHEV

2.-METODO DE COLOCACION ESPECTRAL

2.1.-PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES

- 2.1.1.-Aproximación discreta por series de Chebyshev
- 2.1.2.-Matrices de derivación
- 2.1.3.-Métrica. Cambio del intervalo de aproximación

2.2.-PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

- 2.2.1.-Notación
- 2.2.2.-Métrica. Cambio de coordenadas cartesianas a polares

3.-PROBLEMAS DE CONTORNO

- 3.1.-DEFINICIÓN DEL PROBLEMA. ECUACIONES ELÍPTICAS
- 3.2.-PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES
- 3.3.-PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

4.-PROBLEMAS DE EVOLUCIÓN

- 4.1.-INTEGRADORES TEMPORALES
- 4.2.-PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES

- 4.2.1.-Ecuación del calor en una varilla
- 4.2.2.-Ecuación de Burgers

4.3.-PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

- 4.3.1.-Ecuación de difusión
- 4.3.2.-Ecuación de convección difusión

5.-ANEXO

- 5.1.- MOVIMIENTO POTENCIAL BIDIMENSIONAL DE FLUIDOS IDEALES
- 5.2.- METODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

6.-BIBLIOGRAFÍA

1.- APROXIMACIÓN DE FUNCIONES MEDIANTE SERIES

Expresar la solución de una ecuación diferencial como una serie funcional es la base sobre la que se construyen la mayor parte de los métodos numéricos de resolución de ecuaciones diferenciales.

En este primer capítulo se muestran dos de las aproximaciones más comunes y utilizadas: serie de potencias (Taylor) y trigonométricas. Entre estas últimas cabe destacar la serie de Fourier como la más conocida, pero existen otras muchas, en particular nos centraremos en la expansión de una función utilizando polinomios de Chebyshev.

1.1.- POLINOMIOS DE TAYLOR

Los polinomios de Taylor utilizan series de potencias para realizar aproximaciones locales de funciones. Decimos que la aproximación es local porque se realiza en torno a un punto; cuanto más nos alejamos de éste peor es la aproximación. Para obtener la serie de potencias que aproxima una función igualamos el valor de la serie al de la función y sus sucesivas derivadas.

Una serie de potencias centrada en a es una serie de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$$

siendo tanto los coeficientes a_n como a y x números reales.

Para obtener el polinomio de Taylor de una función tenemos que poder expresar ésta como una serie de potencias. Se dice que una función $f(x)$ admite desarrollo en serie de potencias en el intervalo $(-R+a, R+a)$ si existe una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n$ tal que

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - a)^n \quad \text{para todo } x \in (-R + a, R + a)$$

El polinomio de Taylor que aproxima una función alrededor de un punto a se define de modo que la función y sus derivadas coincidan en ese punto con la serie. Si una función

f tiene derivada de todos los órdenes en $x = a$, se llama serie de Taylor de f centrada en a , a la serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x - a)^n = T(x)$$

El hecho de que una función admita derivadas de todos los órdenes en el punto $x = a$, no implica directamente que se pueda expresar como una serie de potencias. Como se puede observar en la figura [Fig. 1], esto no siempre ocurre. En la figura está representadas la aproximación por medio de la serie de Taylor de la función $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ centrada en $x_0 = 0$

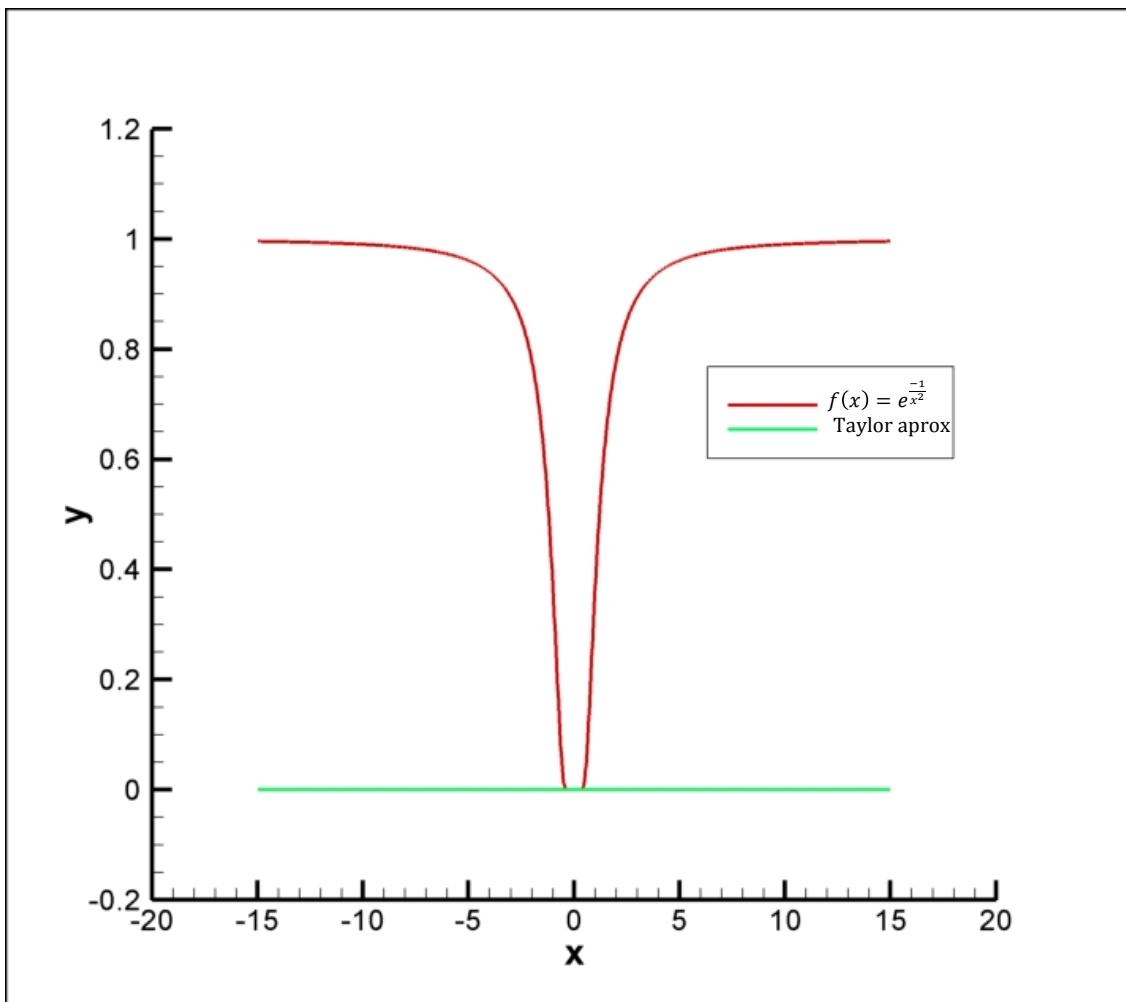


FIGURA 1 Aproximación por medio de la serie de Taylor de la función $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ centrada en $x_0 = 0$

Esta pésima aproximación se debe a que $f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n)}(0) = 0$. Al ser cero todas las derivadas en el punto $x = 0$ la serie de Taylor obtenida es

$$T(x) = f(0)x$$

Es decir, constante e igual al valor de la función en $x = 0$

La condición necesaria y suficiente para que exista desarrollo en serie es la siguiente: si una función $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ admite derivadas de todos los órdenes en un intervalo abierto $(-R, R)$, entonces la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \quad \forall x \in (-R, R)$$

es válida si y sólo si existe algún c entre 0 y x tal que

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1} = 0$$

para todo $x \in (-R, R)$.

Lo que esta condición quiere decir es que para que la función se pueda expresar como un polinomio de Taylor cuando tomemos infinitos términos debe converger a la función que pretende aproximar.

Una definición importante cuando se habla de series de potencias es la de función analítica. Se dice que una función f es analítica en x_0 si, en un intervalo abierto en torno a x_0 , esta función es la suma de una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

que tiene radio de convergencia positivo.

Los principales inconvenientes que tiene la aproximación de series por Taylor son su lentitud y el hecho de estar centrada. El hecho de ser un método lento implica que tenemos que tomar una gran cantidad de términos (en este caso valores de las sucesivas derivadas) para conseguir una buena aproximación. El que sea una aproximación que se realiza alrededor de un punto provoca que la aproximación sea buena alrededor de éste. Para que también sea buena en el resto del intervalo de convergencia tenemos que

incrementar el número de términos de la aproximación. Todo esto puede verse en la figura [Fig. 2]

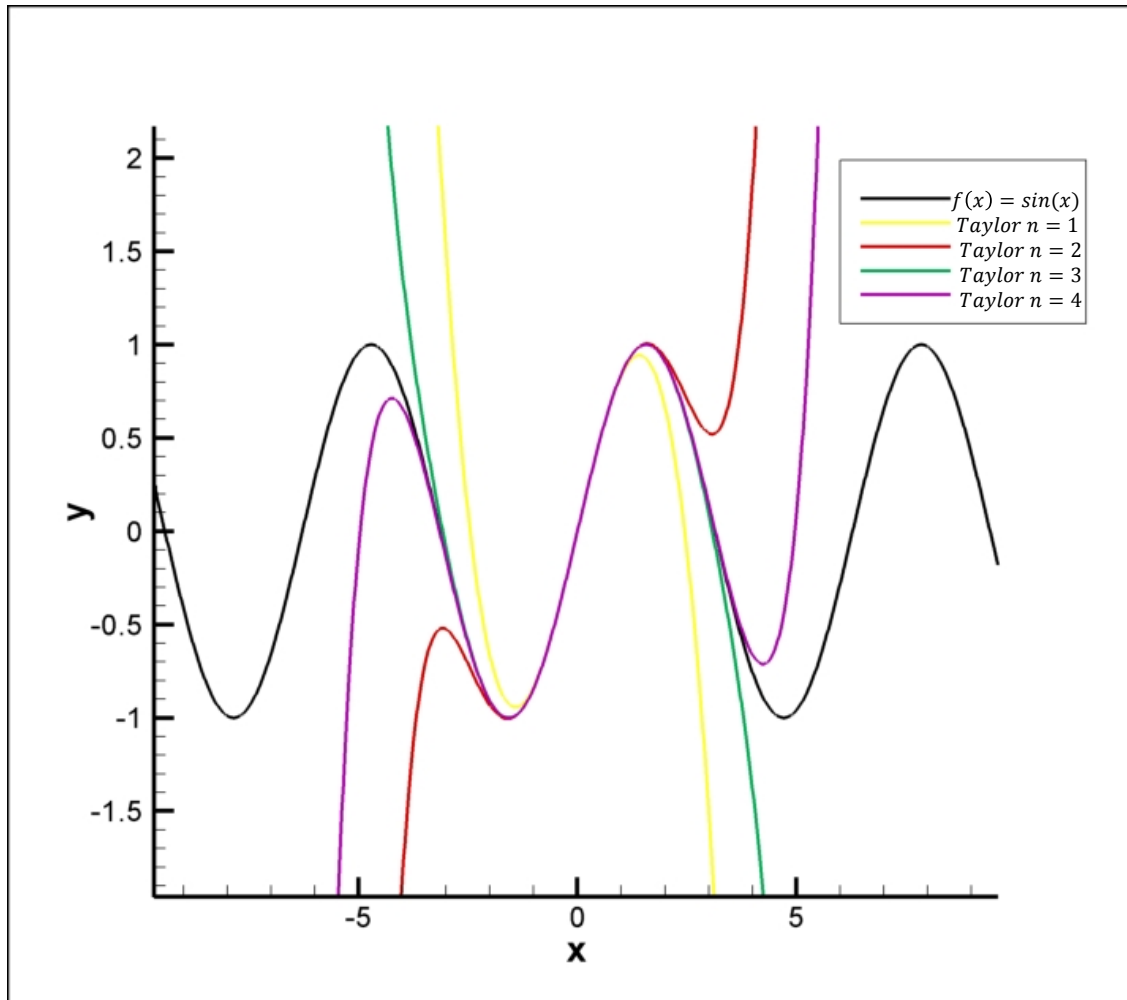


FIGURA 2 Función $f(x) = \sin(x)$ aproximada por la serie de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$

Puede observarse que la función $f(x) = \sin x$ queda bien aproximada con un número pequeño de términos en los alrededores de $x = 0$. En cambio, para conseguir una buena aproximación en puntos alejados de cero tenemos que incrementar el número de términos utilizados.

1.2.- SERIES DE FOURIER

La serie de Fourier es una serie infinita de funciones trigonométricas mediante la cual queremos aproximar una función. Gracias a este cambio de polinomios a funciones

senos y cosenos se consigue una mejora en la precisión del método aunque con el problema de que las funciones a aproximar han de ser periódicas.

Se llama serie de Fourier a la serie infinita a

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

donde a_0, a_n , y b_n son los coeficientes de la serie de Fourier. Para calcular estos coeficientes necesitamos introducir unos conceptos previos de análisis funcional.

Definimos un producto escalar en el espacio de funciones continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$

$$(f(x), g(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$$

Aplicando el producto escalar definido y gracias a la ortogonalidad de la base obtenemos las expresiones generales

$$a_n = \frac{1}{\pi} (\cos(nx), f(x)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} (\sin(nx), f(x)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} (1, f(x)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

Una vez definidos los coeficientes como las proyecciones de la función sobre los elementos de la base, veremos cuáles son las condiciones bajo las que podemos aproximar una función con una serie de Fourier. Dado que las funciones de la base son continuas y periódicas, las funciones aproximadas tendrán que cumplir unos requisitos en lo que a esto se refiere.

Antes de ver las condiciones bajo las cuales la aproximación es posible necesitaremos unas definiciones: las de función suave a trozos y extensión periódica de una función.

Se dice que una función $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ es suave a trozos si I (*intervalo*) se puede dividir en un número finito de subintervalos, donde f y f' sean funciones continuas en cada

uno de estos subintervalos abiertos y las únicas discontinuidades de f y f' en I sean de salto finito.

Se llama extensión periódica de una función $f: (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ a otra función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ consistente en trasladar la función f a lo largo de todo el eje X en los sucesivos intervalos de longitud 2π a derecha e izquierda del intervalo $(-\pi, \pi]$.

Teorema de Dirichlet. Sea $f: (-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ una función suave a trozos, entonces la serie de Fourier de f converge (puntualmente):

- a la extensión periódica de f , en los puntos en los que ésta sea continua;
- a $\frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-))$ en los puntos $x_0 \in \mathbb{R}$ donde la extensión periódica de f tenga discontinuidad de salto finito.

Así, en general tendremos

$$\frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-)) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)]$$

para todo $x \in \mathbb{R}$

Lo que este teorema expresa es que si se cumplen las condiciones del teorema, la aproximación será buena mientras la función sea continua. En caso de que exista una discontinuidad de salto finito la aproximación tenderá a $\frac{1}{2} (f(x_0^+) + f(x_0^-))$

En la figura [Fig. 3] podemos ver un ejemplo de utilización de la serie de Fourier aproximando la función $f(x) = x$

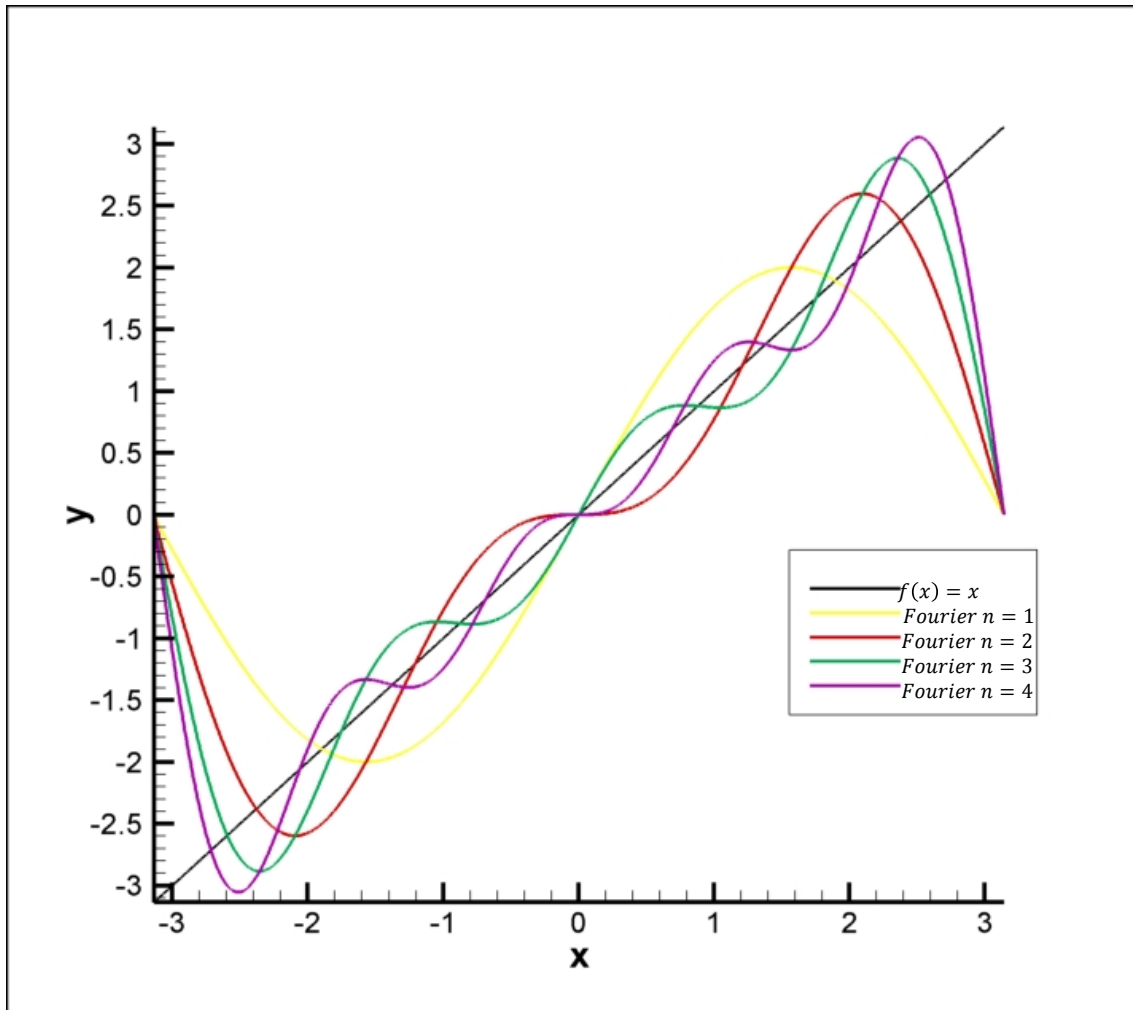


Figura 3 Aproximación de la función $f(x) = x$ mediante la serie de Fourier $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n} (-1)^{n+1} \sin(nx)$

Al igual que en Taylor podemos observar una mejora de la aproximación con un aumento del número de términos utilizados en ella. Los puntos extremos son cero debido al teorema de Dirichlet.

El teorema de Dirichlet nos dice que allá donde la función es continua la aproximación será exacta cuando el número de términos utilizado sea infinito mientras que en los puntos de discontinuidad, la gráfica de la suma de la serie de Fourier pasa por el punto medio del salto. Si se dibujan las sumas parciales, se ve que en las cercanías de los puntos de discontinuidad se reduce la velocidad de convergencia de la serie y que la gráfica de la suma parcial oscila alrededor de la gráfica de la función. Cuando se aumenta el número de términos, las oscilaciones se condensan a ambos lados del punto, pero su amplitud no decrece. La amplitud de la oscilación a cada lado de la gráfica de la

función tiende a ser aproximadamente un 9% del tamaño del salto. En la figura [Fig. 4] podemos observar este fenómeno, conocido como fenómeno de Gibbs.

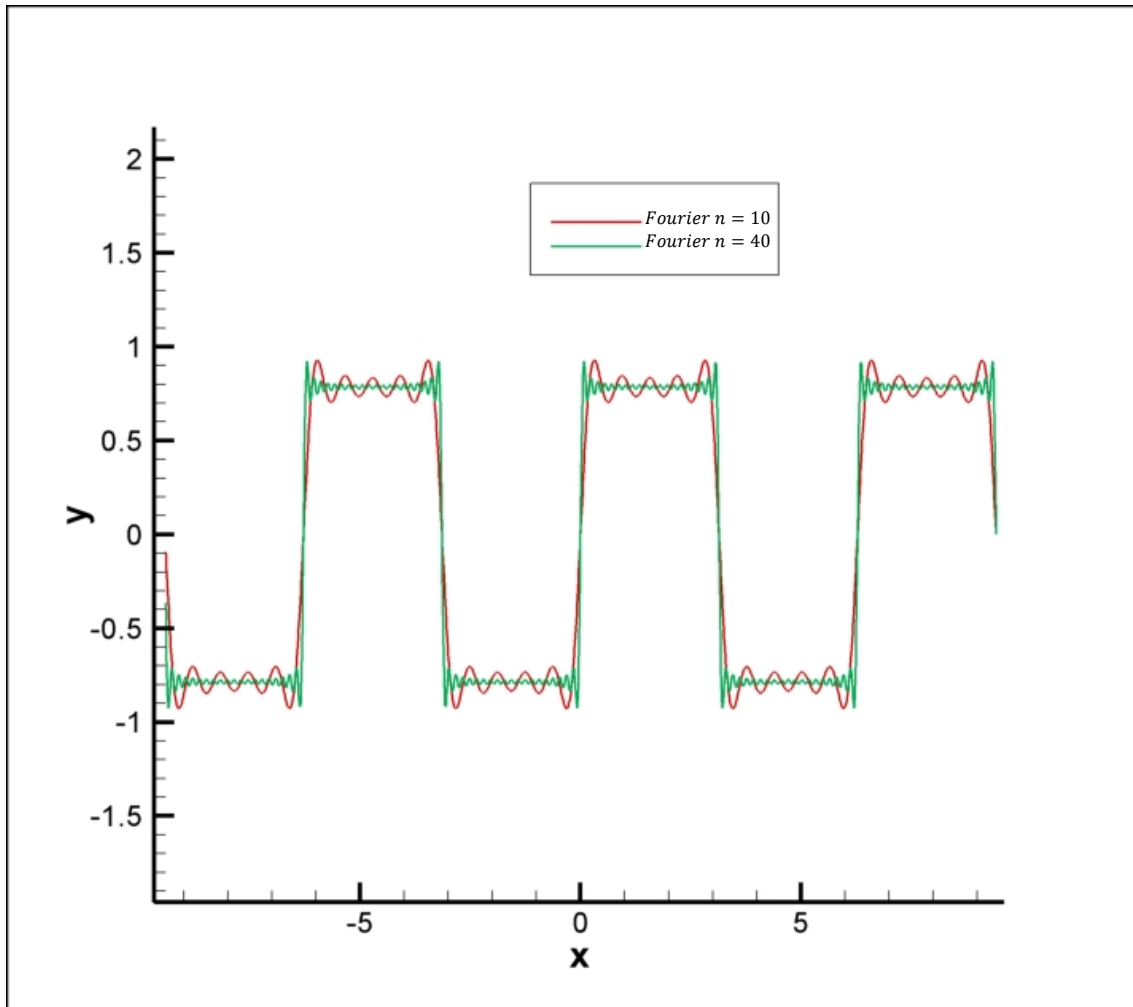


Figura 4 Fenómeno de Gibbs

Esta es la aproximación de Fourier de una onda cuadrada que se utiliza para representar el comportamiento de la corriente alterna.

El problema de la aproximación de Fourier es que sólo es válida si la función a aproximar es periódica (o definida a trozos periódica) y continua (o definida a trozos continua). La gran ventaja es la convergencia espectral (con menos términos obtenemos aproximaciones muy buenas). Para seguir aprovechando esta ventaja y evitar en lo posible las restricciones de periodicidad que impone usar serie en senos y cosenos modificamos la base trigonométrica obteniendo la aproximación en serie de Chebyshev.

1.3.- SERIES DE CHEBYSHEV

Se llaman polinomios de Chebyshev a los definidos en el intervalo $x \in [-1, 1]$ de la forma:

$$\phi_k(x) = \cos k\theta; \quad \theta = \arccos x$$

Así una función $u(x)$ se puede escribir como:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(x); \quad \text{con } a_k = \frac{(u, \phi_k)_w}{\|\phi_k\|_w^2}$$

Para poder hablar con propiedad de producto escalar y norma de un polinomio debemos establecer primero en que espacio trabajamos y definir en él una norma inducida por el producto escalar.

Sea el espacio

$$L_w^2(I) = \left\{ u : I \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } u \text{ es medible y } \|u\|_w < \infty \right\} \text{ con } I = (-1, 1)$$

donde

$$\|u\|_w = \left(\int_{-1}^1 |u(x)|^2 w(x) dx \right)^{1/2}$$

es la norma inducida por el producto escalar,

$$(u, v)_w = \int_{-1}^1 u(x) v(x) w(x) dx$$

siendo $w(x)$ una función no negativa integrable llamada función peso.

Aplicando la teoría anterior al caso particular de los polinomios de Chebyshev, usando la función peso:

$$w(x) = (1 - x^2)^{-1/2}$$

podemos definir,

$$(u, v)_w = \int_{-1}^1 u(x) v(x) \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$\|u\|_w = \left(\int_{-1}^1 |u(x)|^2 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \right)^{1/2}$$

Haciendo el cambio de variable $x = \cos \theta$ y operando

$$(\phi_n, \phi_m) = \frac{\pi}{2} c_n \delta_{nm}, \quad c_n = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Donde

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = m \\ 0 & \text{si } n \neq m \end{cases}$$

y

$$\|\phi_n\|_w = \sqrt{\frac{\pi}{2} c_n}$$

Por tanto si $u \in L_w^2(I)$ su serie de Chebyshev es:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \phi_k(x), \quad \text{con } a_j = \frac{2}{\pi c_k} (u, \phi_k)_w$$

De este modo una función quedaría definida por sus coeficientes en la base de polinomios de Chebyshev, estos coeficientes son la proyección (en cuanto que es un producto escalar) de la función en cada elemento de la base. La función así generada es una aproximación continua en el “espacio” de los coeficientes.

En la siguiente figura [Fig. 5] podemos ver un ejemplo de aproximación de la función $f(x) = \tanh(100x)$

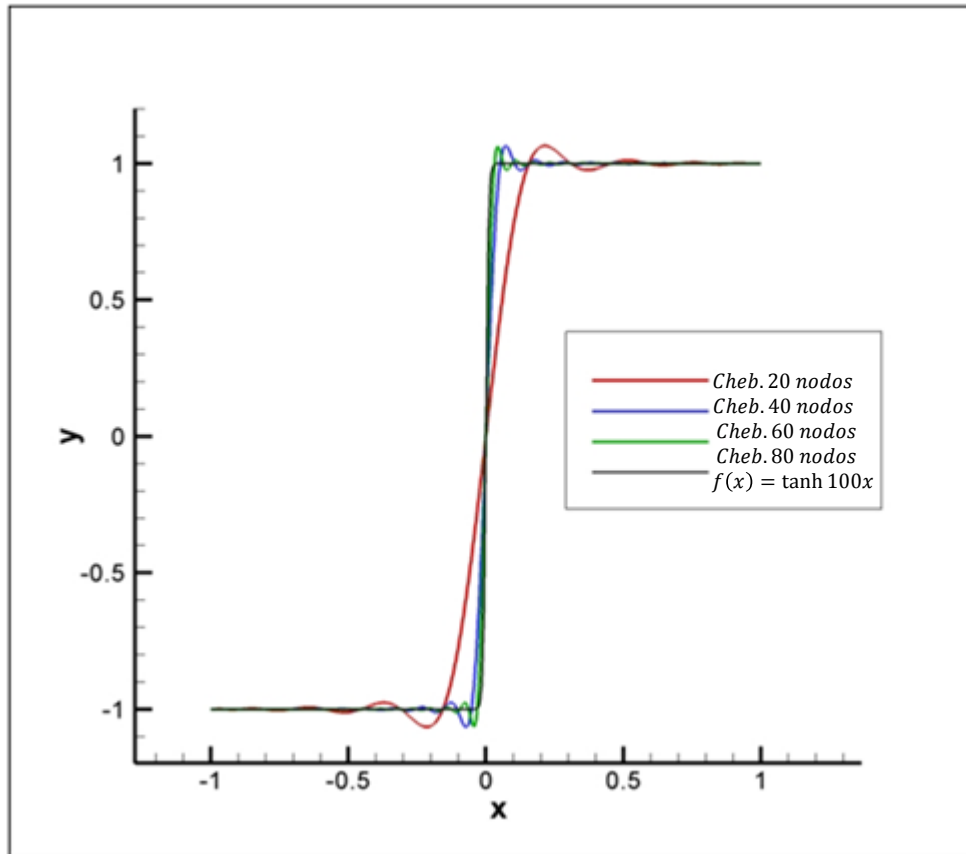


Figura 5: Aproximación de la función $f(x) = \tanh(100x)$ mediante series de Chebyshev

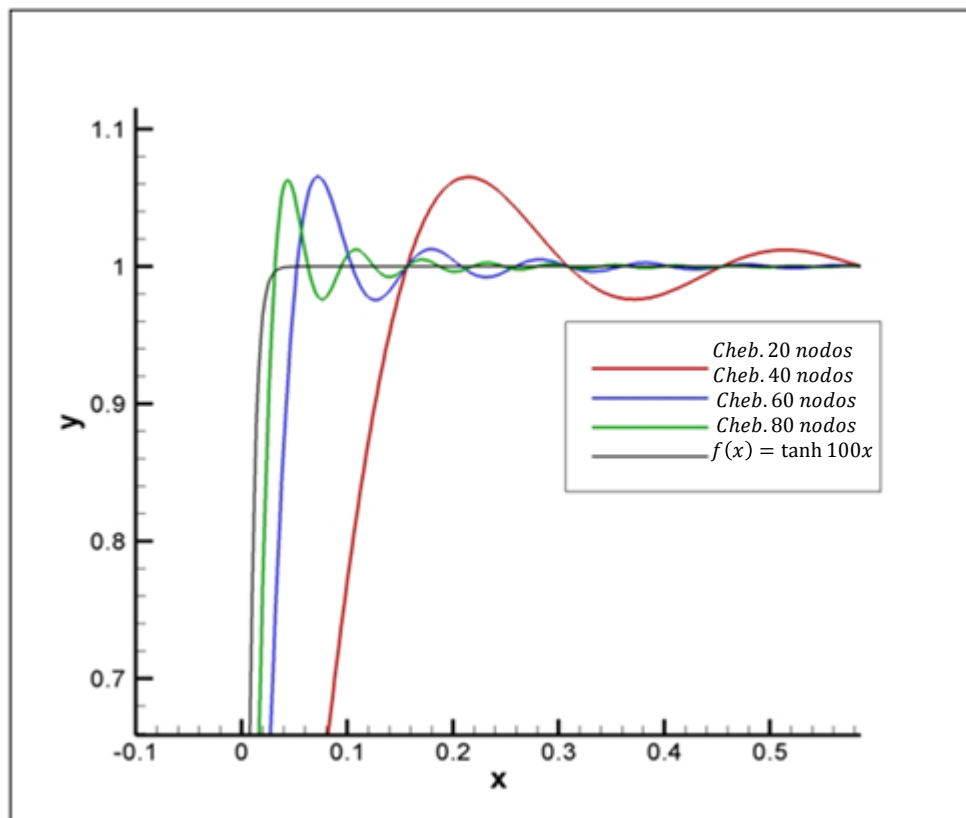


Figura 6 ZOOM de aproximación de la función $f(x) = \tanh(100x)$ mediante series de Chebyshev

Evidentemente, como no estamos usando la serie infinita cometemos un error en cada aproximación. Este error se reduce según agregamos términos excepto en las discontinuidades de la función donde el error de la suma finita no tiende a cero a medida que agregamos armónicos. Volvemos a encontrarnos ante el fenómeno de Gibbs mencionado anteriormente. Esto es debido a que como en la serie de Fourier los elementos de la base siguen siendo funciones continuas.

2.- MÉTODO DE COLOCACIÓN ESPECTRAL

En el anterior capítulo nos hemos centrado en la aproximación continua de funciones. Es decir podemos recuperar la función original calculando unos coeficientes que resultan de proyectar la función sobre una base determinada.

En problemas de resolución de ecuaciones diferenciales esta aproximación no siempre es posible ya que el cálculo de los coeficientes de la serie requiere conocer la función.

$$a_k = \frac{(u, \phi_k)_w}{\|\phi_k\|_w^2}$$

Partiendo de la aproximación de Chebyshev, llegaremos a su expresión discreta donde las incógnitas a calcular dejarán de ser los coeficientes sino el valor de la función en un conjunto de puntos.

2.1.- PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES

2.1.1.- APROXIMACIÓN DISCRETA POR SERIES DE CHEBYSHEV

El procedimiento comienza escogiendo los puntos donde aproximar la función. Para cualquier número natural N definimos los $N+1$ nodos de Chebyshev-Gauss-Lobatto como:

$$X_i = \cos\left(\frac{\pi \cdot i}{N}\right) \quad i = 0 \dots N$$

y las funciones peso:

$$w_j = \frac{\pi}{d_j N} \quad \text{con} \quad d_j = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 0, N \\ 1 & \text{si } j = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

En este espacio discreto el producto escalar y la norma se definen como,

$$(u, v)_N = \frac{\pi}{N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{d_j} u(x_j) v(x_j)$$

$$\|u\|_N = \left(\frac{\pi}{N} \sum_{j=0}^N \frac{1}{d_j} u^2(x_j) \right)^{1/2}$$

Podemos definir la interpolada de una función $u(x)$ como $I_N u$ tal que

$$I_N u(x_j) = u(x_j) \quad \forall j = 0, \dots, N$$

Es decir, que en los nodos de Chebyshev-Gauss-Lobatto los valores de la función y su interpolada coincidan.

La definición de producto escalar discreto directamente implica que $(I_N u, v) = (u, v)$ lo que hace que la función $I_N u(x)$ en el intervalo $[-1, 1]$ se pueda escribir como:

$$I_N u(x) = \sum_{k=0}^N a_k^* \phi_k(x) \quad \text{con} \quad a_k^* = \frac{(I_N u, \phi_k)_N}{\|\phi_k\|_N^2} = \frac{(u, \phi_k)_N}{\|\phi_k\|_N^2}$$

Como

$$\|\phi_k\|_N = \sqrt{\frac{\pi}{2} d_k}, \quad k = 0, \dots, N,$$

$$(u, \phi_k)_N = \frac{\pi}{2} \sum_{j=0}^N \frac{1}{d_j} \cos\left(\frac{kj\pi}{N}\right) u(x_j)$$

$$a_k^* = \frac{2}{N d_k} \sum_{j=0}^N \frac{1}{d_j} \cos\left(\frac{kj\pi}{N}\right) u(x_j)$$

Sustituyendo

$$I_N u(x) = \sum_{k=0}^N \frac{2}{N d_k} \sum_{j=0}^N \frac{1}{d_j} \phi_k(x_j) u(x_j) \phi_k(x)$$

Si consideramos

$$\psi_i(x) = \frac{2}{N d_i} \sum_{k=0}^N \frac{1}{d_k} \phi_m(x_i) \phi_m(x)$$

Obtenemos

$$I_N u(x) = \sum_{k=0}^N u(x_k) \psi_k(x)$$

donde $\psi_k(x)$ se conocen como funciones cardinales y realizando una serie de operaciones en la expresión anterior llegamos a

$$\psi_k(x) = \frac{(-1)^{k+1} (1-x^2) \phi'_N(x)}{d_k N^2 (x-x_k)}$$

De este modo podemos aproximar una función mediante su interpolada a partir de los valores que toma un conjunto discreto de puntos. Realmente esto no es muy distinto a cualquier otro tipo de interpolación como puede ser la interpolación por medio de polinomios de Lagrange.

Este método, donde las incógnitas ya no son los coeficientes sino los valores de la función en los nodos, se denomina “método de colocación” y va a ser el empleado en la resolución de los problemas planteados.

2.1.2.- MATRICES DE DERIVACIÓN

El objetivo de este apartado es generar unas matrices mediante las cuales transformaremos la derivación en un producto matricial. Esto nos reportará grandes beneficios a la hora de resolver ecuaciones diferenciales.

Con esta notación la derivación se define como

$$(\partial I_N u)(x_j) = \sum_{i=0}^N u(x_i) \psi'_i(x_j)$$

O en su forma matricial

$$\begin{pmatrix} D_{0,0} & D_{0,1} & \cdot & \cdot & \cdot & D_{0,N} \\ D_{1,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{N,0} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & D_{N,N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(x_0) \\ u(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u'(x_0) & u'(x_1) & \cdot & u'(x_{N2}) \end{pmatrix}$$

Esto implica que conocidos los valores de la función en los nodos de Chebyshev-Gauss-Lobatto podemos hallar el valor de la derivada en esos puntos a través de la matriz de derivación.

Los valores de los elementos de la matriz D son las derivadas de las funciones

cardinales $D_{ji} = \frac{d\psi_i}{dx} \Big|_{x=x_j}$ cuyo valor puede encontrarse referenciado en manuales como Threfeten, Boyd o Canuto.

$$\frac{d\psi_i}{dx_j} = \begin{cases} \frac{2N^2 + 1}{6} & i = j = 0 \\ -\frac{\cos(\frac{\pi j}{N})}{2 \left(1 - \left(\cos(\frac{\pi j}{N}) \right)^2 \right)} & i = j \\ \frac{d_i}{d_j} \frac{-1^{i+j}}{\cos(\frac{\pi i}{N}) - \cos(\frac{\pi j}{N})} & i \neq j \\ -\frac{2N^2 + 1}{6} & i = j = N \end{cases}$$

con

$$d_j = \begin{cases} 2 & \text{si } j = 0, N \\ 1 & \text{si } j = 1, \dots, N-1 \end{cases}$$

Una imagen [Fig. 7] clarifica esto

$$D_N = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \frac{2N^2+1}{6} & 2 \frac{(-1)^j}{1-x_j} & \frac{1}{2}(-1)^N \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & \\ \hline -\frac{1}{2} \frac{(-1)^i}{1-x_i} & \frac{-x_j}{2(1-x_j^2)} & \frac{1}{2} \frac{(-1)^{N+i}}{1+x_i} \\ \hline & \frac{(-1)^{i+j}}{x_i-x_j} & \\ \hline -\frac{1}{2}(-1)^N & -2 \frac{(-1)^{N+j}}{1+x_j} & -\frac{2N^2+1}{6} \\ \hline \end{array}$$

Figura 7 Representación gráfica de las matrices de derivación (Imagen obtenida del libro de Trefethen)

En la figura [Fig. 8] tenemos un ejemplo de derivación numérica utilizando las matrices de derivación. En la figura está representada la derivada de la función $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$

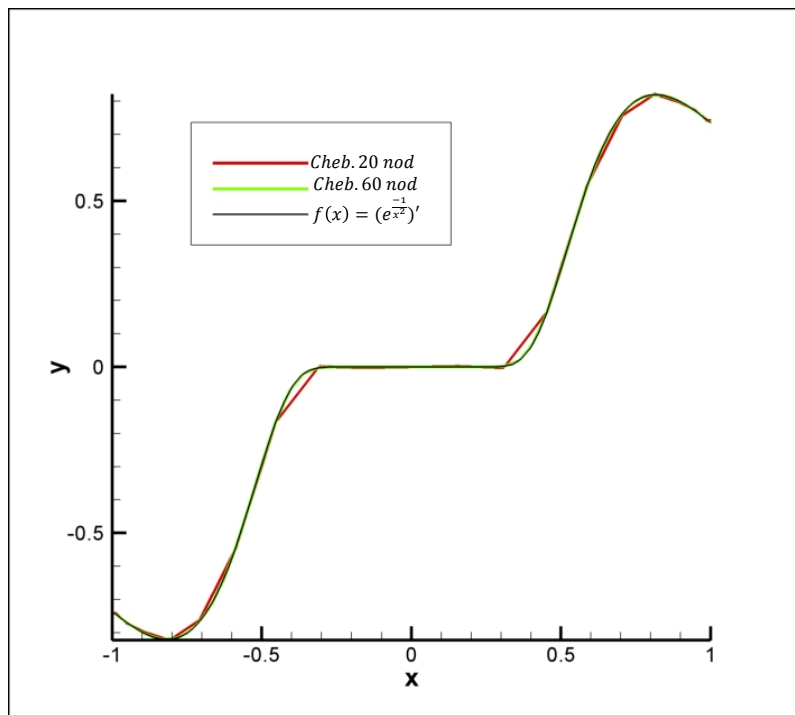


Figura 8 Aproximación de la derivada de la función $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ mediante series de Chebyshev

Se observa la mejora de precisión conseguida con 60 nodos donde es indistinguible la aproximación de la derivada de la derivada analítica. Es importante señalar la manera en que se ha conseguido esta aproximación de la derivada. Conocidos los valores de la función en los nodos de Chebyshev-Gauss-Lobatto, se realiza el producto matricial

$$DU = U'$$

con lo que se obtienen los valores aproximados de la derivada en los nodos.

2.1.3.- MÉTRICA. CAMBIO DEL INTERVALO DE APROXIMACIÓN

Aunque tanto los nodos de Chebyshev-Gauss-Lobatto como los polinomios de Chebyshev se han definido únicamente en $[-1,1]$ vamos a ver algunas transformaciones métricas sencillas para poder utilizarlos en dominios generales.

Para ello realizamos un cambio de coordenadas pasando del intervalo $[-1,1]$ al intervalo $[a, b]$

$$y_j = \cos \frac{\pi j}{N}, \quad j = 0, \dots, N$$

$$x_j = \frac{a-b}{2} y_j + \frac{a+b}{2}$$

Consecuentemente, los valores de la matriz de derivación también cambiarán. Por la regla de la cadena

$$\left. \frac{d\psi_i}{dx} \right|_{x=x_j} = \sum_k \left. \frac{d\psi_i}{dy_k} \frac{dy_k}{dx} \right|_{x=x_j} = \frac{2}{a-b} \left. \frac{d\psi_i}{dy_j} \right|_{x=x_j}$$

Con este cambio de variable podemos realizar una comparación entre el resultado obtenido anteriormente para la aproximación de la función $f(x) = e^{\frac{-1}{x^2}}$ por Taylor y por Chebyshev. El resultado obtenido se puede ver en la figura [Fig. 9]

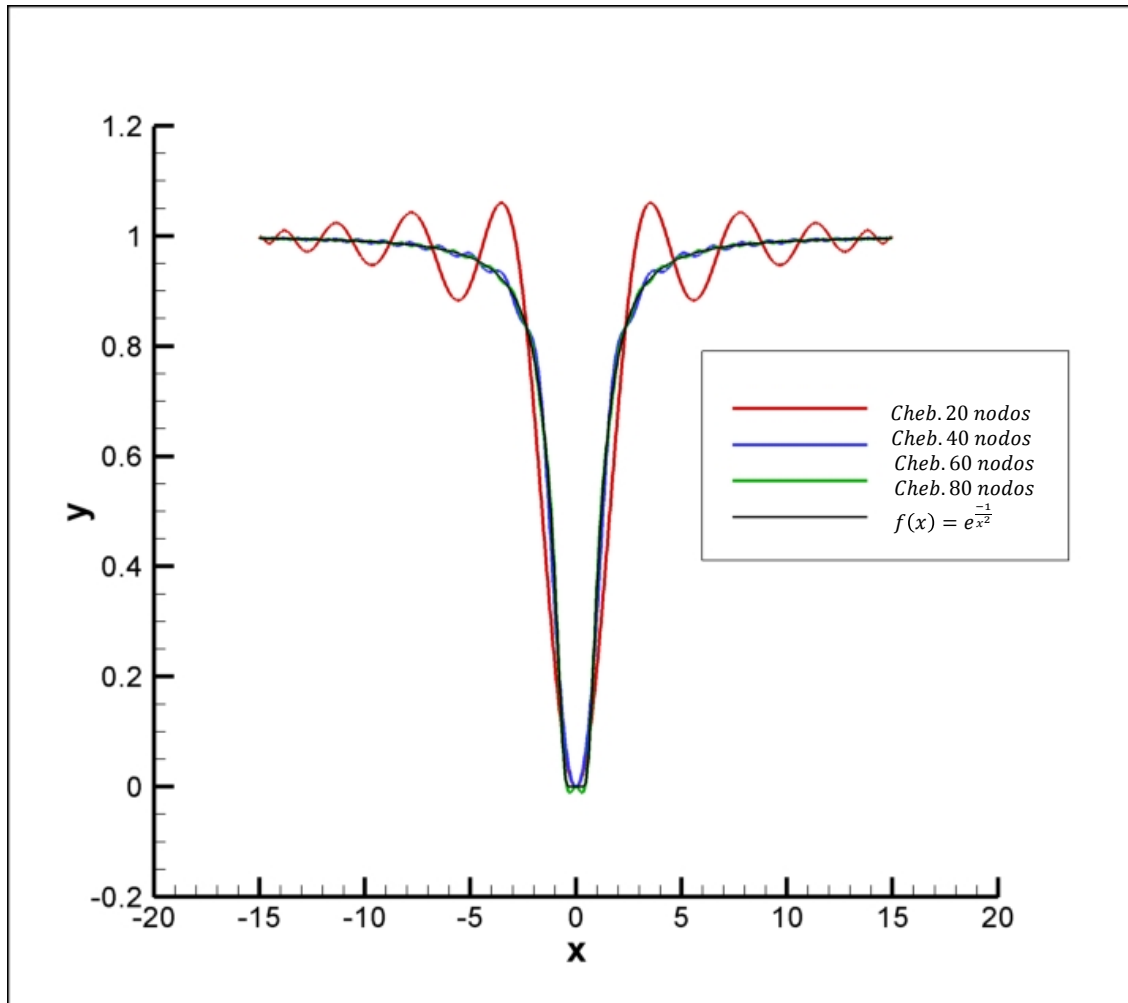


Figura 8 Aproximación de la función $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$ mediante series de Chebyshev

Vemos como en este caso la aproximación sí es correcta

2.2.- PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

2.2.1.- NOTACIÓN

El primer problema que surge a la hora de extender los métodos espectrales a un dominio bidimensional es de notación. Dado un dominio 2-D, $[x_0, x_f] \times [y_0, y_f]$, sean X_{N_x} y Y_{N_y} los N_x+1 nodos de Chebyshev-Gauss-Lobatto en la dirección “x” y los N_y+1 en la dirección “y”.

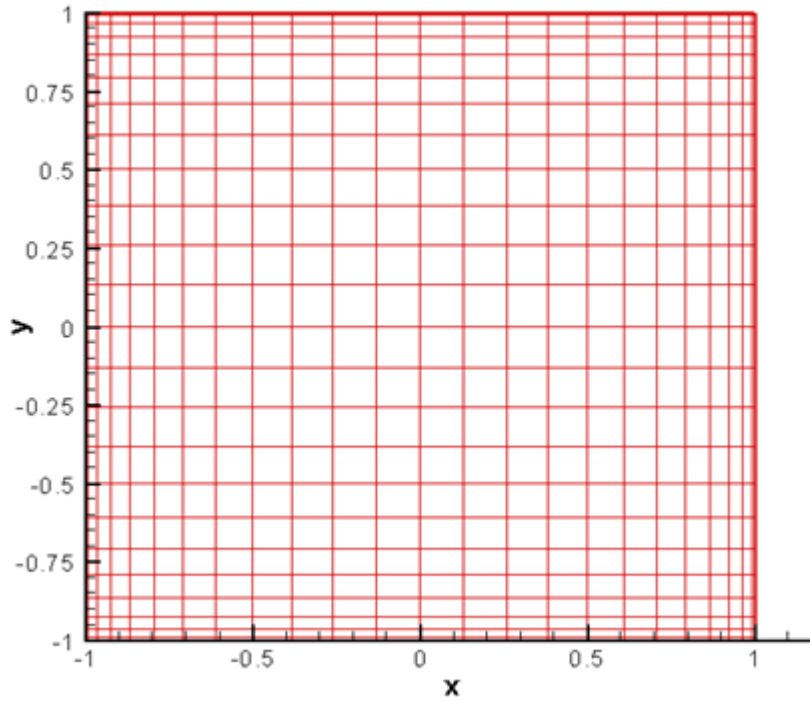


Figura 10 Malla 2-D con 25 nodos en cada dirección

La malla generada así [Fig. 10] está formada por $[Nx + 1] \times [Ny + 1]$ nodos. Usando el método de colocación descrito en el apartado anterior las incógnitas van a ser los valores de la función en dichos nodos, por tanto si usásemos notación matricial tendríamos la matriz de incógnitas

$$\begin{pmatrix} u(0,0) & u(1,0) & \dots & u(Nx,0) \\ u(0,1) & u(1,1) & \dots & u(Nx,1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(0,Ny) & u(1,Ny) & \dots & u(Nx,Ny) \end{pmatrix}$$

Esta notación crearía problemas a la hora de resolver el sistema de ecuaciones lineales $Ax = b$ que aparecerá en los problemas de integración. Por tanto transformaremos la matriz en un vector unidimensional de variables del siguiente modo,

$$\begin{pmatrix} u(0,0) & u(1,0) & \dots & u(Nx,0) \\ u(0,1) & u(1,1) & \dots & u(Nx,1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(0,Ny) & u(0,Ny) & \dots & u(Nx,Ny) \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} u(0,0) \\ u(1,0) \\ \vdots \\ u(Nx,0) \\ \hline u(0,1) \\ u(1,1) \\ \vdots \\ u(Nx,1) \\ \hline \vdots \\ \hline u(0,Ny) \\ u(1,Ny) \\ \vdots \\ u(Nx,Ny) \end{pmatrix}$$

Esto implica que las matrices D_x y D_y , operadores diferenciales en cada dirección, cambian para adaptarse a este vector de variables. La forma de las nuevas D_x y D_y está condicionada por la elección de la dirección “y” como dirección fija mientras que se recorren los nodos en “x”. Así,

$$D'_x = \begin{pmatrix} Dx(0,0) & Dx(0,1) & \dots & Dx(0,Nx) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Dx(1,0) & Dx(1,1) & \dots & Dx(1,Nx) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Dx(Nx,0) & Dx(Nx,1) & \dots & Dx(Nx,Nx) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Dx(0,0) & Dx(0,1) & \dots & Dx(0,Nx) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Dx(1,0) & Dx(1,1) & \dots & Dx(1,Nx) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Dx(Nx,0) & Dx(Nx,1) & \dots & Dx(Nx,Nx) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & Dx(0,0) & Dx(0,1) & \dots & Dx(0,Nx) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & Dx(1,0) & Dx(1,1) & \dots & Dx(1,Nx) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & Dx(Nx,0) & Dx(Nx,1) & \dots & Dx(Nx,Nx) \end{pmatrix}$$

y

$$D'y = \begin{pmatrix} Dy(0,0) & 0 & \cdot & 0 & & Dy(0,Ny) & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & Dy(0,0) & \cdot & 0 & & 0 & Dy(0,Ny) & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \dots\dots\dots & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & Dy(0,0) & & 0 & 0 & \cdot & Dy(0,Ny) \\ \text{-----} & & & & & \text{-----} & & & \\ Dy(1,0) & 0 & \cdot & 0 & & Dy(1,Ny) & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & Dy(1,0) & \cdot & 0 & & 0 & Dy(1,Ny) & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & Dy(1,0) & & 0 & 0 & \cdot & Dy(1,Ny) \\ \cdot & & & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & & & \cdot \\ Dy(Ny,0) & 0 & \cdot & 0 & & Dy(Ny,Ny) & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & Dy(Ny,0) & \cdot & 0 & & 0 & Dy(Ny,Ny) & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & Dy(Ny,0) & & 0 & 0 & \cdot & Dy(Ny,Ny) \end{pmatrix}$$

Por tanto

$$\begin{pmatrix} Dx \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0,0) \\ u(1,0) \\ \vdots \\ u(Nx,0) \\ \text{-----} \\ u(0,1) \\ u(1,1) \\ \vdots \\ u(Nx,1) \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{-----} \\ u(0,Ny) \\ u(1,Ny) \\ \vdots \\ u(Nx,Ny) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x(0,0) \\ u_x(1,0) \\ \vdots \\ u_x(Nx,0) \\ \text{-----} \\ u_x(0,1) \\ u_x(1,1) \\ \vdots \\ u_x(Nx,1) \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{-----} \\ u_x(0,Ny) \\ u_x(1,Ny) \\ \vdots \\ u_x(Nx,Ny) \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} Dy \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0,0) \\ u(1,0) \\ \vdots \\ u(Nx,0) \\ \text{-----} \\ u(0,1) \\ u(1,1) \\ \vdots \\ u(Nx,1) \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{-----} \\ u(0,Ny) \\ u(1,Ny) \\ \vdots \\ u(Nx,Ny) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y(0,0) \\ u_y(1,0) \\ \vdots \\ u_y(Nx,0) \\ \text{-----} \\ u_y(0,1) \\ u_y(1,1) \\ \vdots \\ u_y(Nx,1) \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \vdots \\ \text{-----} \\ u_y(0,Ny) \\ u_y(1,Ny) \\ \vdots \\ u_y(Nx,Ny) \end{pmatrix}$$

A partir de estas dos matrices podemos enunciar problemas en derivadas parciales en 2-D mediante combinaciones de las mismas

La operación que estamos realizando sobre la matriz original D para calcular las matrices bidimensionales D_x y D_y es el producto de Kronecker entre la matriz D y la identidad.

$$D_x = I \otimes D$$

$$D_y = D \otimes I$$

Siendo \otimes el símbolo que denota el producto de Kronecker

El producto de Kronecker consiste en lo siguiente

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{cc|cc} a & b & 2a & 2b \\ c & d & 2c & 2d \\ \hline 3a & 3b & 4a & 4b \\ 3c & 3d & 4c & 4d \end{array} \right)$$

Un ejemplo de aplicación en nuestro problema puede clarificar las ideas. El ejemplo ha sido extraído del libro de Trefethen.

$$\tilde{D}_4^2 = \begin{pmatrix} -14 & 6 & -2 \\ 4 & -6 & 4 \\ -2 & 6 & -14 \end{pmatrix}$$

$$I \otimes \tilde{D}_N^2 = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -14 & 6 & -2 & & & & & & \\ 4 & -6 & 4 & & & & & & \\ -2 & 6 & -14 & & & & & & \\ \hline & & & -14 & 6 & -2 & & & \\ & & & 4 & -6 & 4 & & & \\ & & & -2 & 6 & -14 & & & \\ \hline & & & & & & -14 & 6 & -2 \\ & & & & & & 4 & -6 & 4 \\ & & & & & & -2 & 6 & -14 \end{array} \right)$$

$$\tilde{D}_N^2 \otimes I = \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} -14 & & & 6 & & & -2 & & \\ & -14 & & & 6 & & & -2 & \\ & & -14 & & & 6 & & & -2 \\ \hline & 4 & & -6 & & & 4 & & \\ & & 4 & & -6 & & & 4 & \\ & & & 4 & & -6 & & & 4 \\ \hline -2 & & & 6 & & & -14 & & \\ & -2 & & & 6 & & & -14 & \\ & & -2 & & & 6 & & & -14 \end{array} \right)$$

2.2.2.- MÉTRICA. CAMBIO DE COORDENADAS CARTESIANAS A POLARES

Existen ciertos problemas en los que por su geometría es preferible utilizar otro tipo de coordenadas para su modelización. Vamos a realizar un cambio de variable a polares como ejemplo aunque otro cambio sería posible

Siendo

$$x = r \cdot \cos \theta$$

$$y = r \cdot \sin \theta$$

Sea

$$F(x, y) = U$$

Entonces

$$U_r = \frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$U_\theta = \frac{\partial U}{\partial \theta} = \frac{\partial U}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

En forma matricial

$$\begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix}$$

O lo que es lo mismo

$$\begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \cdot \sin \theta & r \cdot \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -r \cdot \sin \theta & r \cdot \cos \theta \end{bmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix}$$

Hay que comentar que la inversión realizada no es posible en el caso de que $r = 0$. Esto no nos preocupa ya que los problemas que resolvamos involucran cilindros por lo que r siempre será mayor que 0

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_y \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\frac{1}{r} \sin \theta \\ \sin \theta & \frac{1}{r} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_r \\ U_\theta \end{pmatrix}$$

En resumen

$$D_x = \cos \theta D_r - \frac{1}{r} \sin \theta D_\theta$$

$$D_y = \sin \theta D_r + \frac{1}{r} \cos \theta D_\theta$$

Es importante señalar que lo que hemos hecho mediante este cambio de coordenadas es lo que se ve en la figura [Fig. 11]

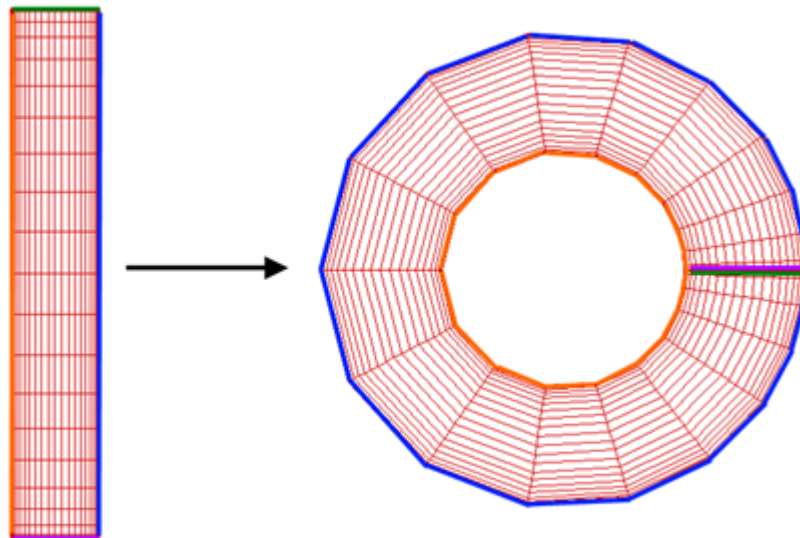


Figura 11 Representación gráfica del cambio de coordenadas

Nosotros sabemos resolver el problema en coordenadas cartesianas (las matrices de derivación D_r, D_θ están expresadas en esas coordenadas). Así que lo resolvemos en esas coordenadas. Nuestro dominio computacional será el de la izquierda mientras que el real, el físico será el de la derecha.

3.- PROBLEMAS DE CONTORNO

Nuestro problema objetivo es la resolución de ecuaciones diferenciales. Vamos a centrarnos en un tipo de ecuaciones sencillas como son las ecuaciones elípticas.

3.1.- DEFINICIÓN DEL PROBLEMA. ECUACIONES ELÍPTICAS

Podemos escribir una ecuación diferencial elíptica de segundo orden de modo genérico como:

$$u_{xx} + q_1(x)u_x + q_0(x)u = f(x) \quad x \in [a, b]$$

Al ser un problema de contorno de segundo orden podemos encontrar condiciones de contorno tipo Dirichlet, Neumann o Robin, en los extremos.

$$\begin{cases} u(a) = u_a \\ u(b) = u_b \end{cases} \quad \text{Dirichlet}$$

$$\begin{cases} u_x(a) = u_a \\ u_x(b) = u_b \end{cases} \quad \text{Neumann}$$

$$\begin{cases} u_x(a) + \gamma u(a) = u_a \\ u_x(b) + \gamma u(b) = u_b \end{cases} \quad \text{Robin}$$

3.2.- PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES

Vamos ahora a utilizar las matrices de derivación para la resolución de este tipo de problemas. Ahora la ecuación

$$u_{xx} + q_1(x)u_x + q_0(x)u = f(x) \quad x \in [a, b]$$

se puede escribir en forma genérica como

$$LU = F$$

donde

$$L = D^2 + Q_1 D + Q_0$$

En su forma matricial la ecuación se ha transformado en

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & \dots & L_{0N} \\ L_{10} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{N0} & \cdot & \cdot & L_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(x_0) \\ U(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ U(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ F(x_N) \end{pmatrix}$$

Este problema es análogo al de la derivación utilizando las matrices del apartado 2.1.2. La única diferencia es que el vector de incógnitas U y el de valores conocidos F están cambiados de lugar.

Las condiciones de contorno se imponen cambiando filas en la matriz L y en el vector $F(x)$. Así si queremos imponer una condición de contorno tipo Dirichlet en $x_0 = a$, $U(a) = U_a$, bastara sustituir,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ L_{10} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ L_{N0} & \cdot & \cdot & L_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(x_0) \\ U(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ U(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_a \\ F(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ F(x_N) \end{pmatrix}$$

Por el contrario si la condición a imponer es del tipo Neumann en $x_N = b$, $U_x(b) = U'_b$, la sustitución será,

$$\begin{pmatrix} L_{00} & L_{01} & \dots & L_{0N} \\ L_{10} & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ D_{N0} & D_{N1} & \cdot & D_{NN} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U(x_0) \\ U(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ U(x_N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(x_0) \\ F(x_1) \\ \cdot \\ \cdot \\ U'_b \end{pmatrix}$$

Las condiciones de contorno tipo Robin son combinación de las anteriores.

Lo que hemos hecho ha sido discretizar el problema y sobre él aplicar las condiciones de contorno. Hemos convertido la integración en la resolución de un sistema lineal de ecuaciones de tipo $Ax = b$. Existe una gran cantidad de métodos para la resolución de este tipo de problemas. En el anexo se realiza un pequeño estudio sobre los distintos métodos existentes y se razona la utilización de la factorización LU. Dentro de la factorización utilizaremos además dos subrutinas de la biblioteca LAPACK (Linear Algebra PACKage): DGETRF que factoriza la matriz y DGETRS que resuelve el sistema una vez que la matriz del mismo está factorizada por ser mucho más eficientes que las programadas por nosotros mismos.

La gran ventaja de la integración espectral respecto a las diferencias finitas es la precisión. Utilizando diferencias finitas la precisión obtenida depende del orden del método. En cambio utilizando integración espectral la precisión depende del número de puntos que utilicemos para dividir el intervalo ya que todos los puntos serán usados en la aproximación.

También hay que tener en cuenta que la forma de la matriz A será distinta utilizando métodos espectrales o diferencias finitas. En el primer caso, estamos ante matrices densas mientras que en el segundo tenemos matrices con una forma definida y poco densas (tridiagonales, pentadiagonales... dependiendo del orden). Los métodos de resolución de matrices poco densas están mucho más optimizados que los de matrices densas lo cual es un punto a favor de los métodos de diferencias finitas.

Veamos un ejemplo. Tenemos la ecuación diferencial

$$U_{xx} + x \cdot U_x = 2x^2 + 2 \quad x \in [-1, 1]$$

con condiciones de contorno

$$U(-1) = 1$$

$$U(1) = 1$$

Usando el método anteriormente descrito obtenemos la solución [Fig. 12]

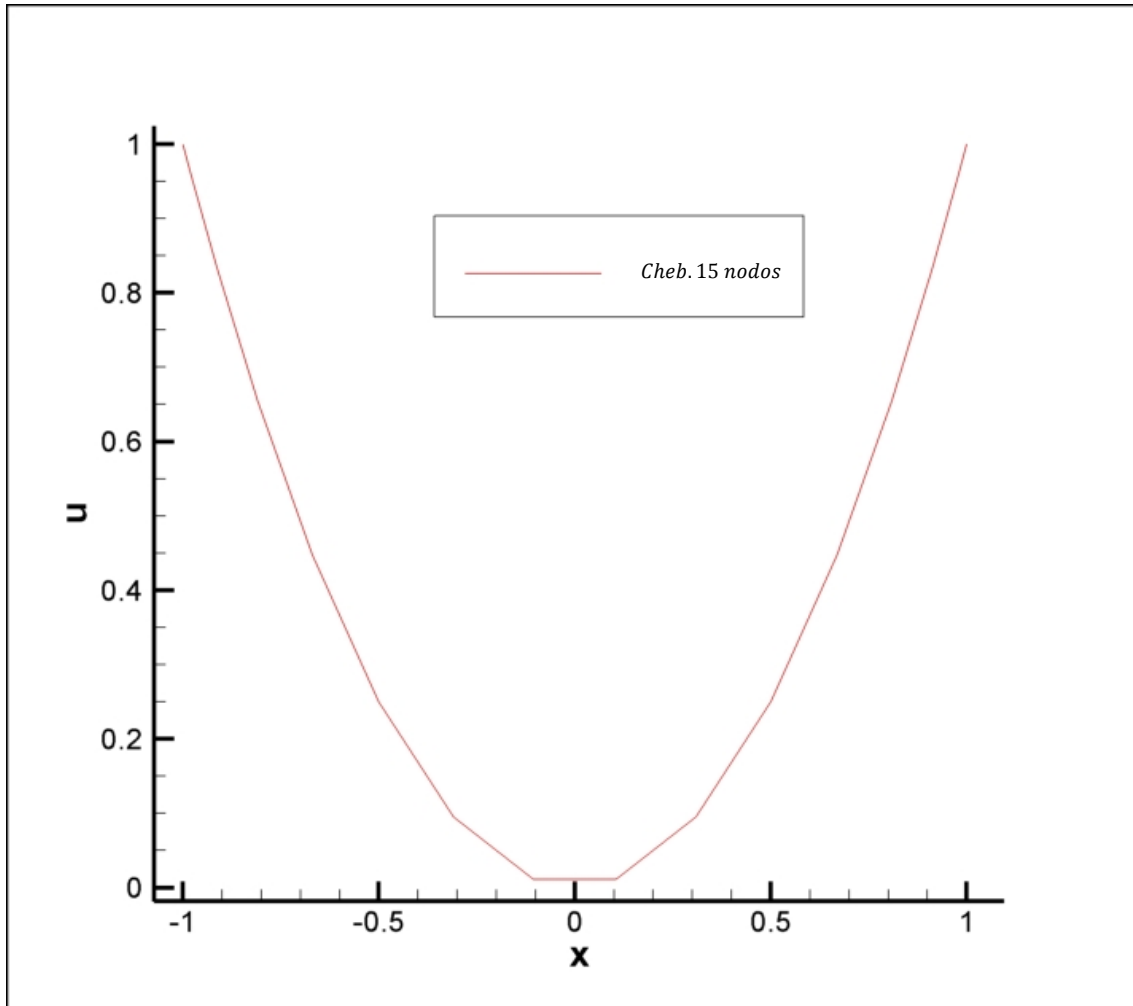


Figura 12 Integración de ecuación diferencial por el método de colocación espectral

Y cambiando el intervalo de integración utilizando el cambio de métrica antes descrito

$$U_{xx} + x \cdot U_x = 2x^2 + 2 \quad x \in [-2, 2]$$

$$U(-2) = 4$$

$$U(2) = 4$$

Obtenemos [Fig. 12]

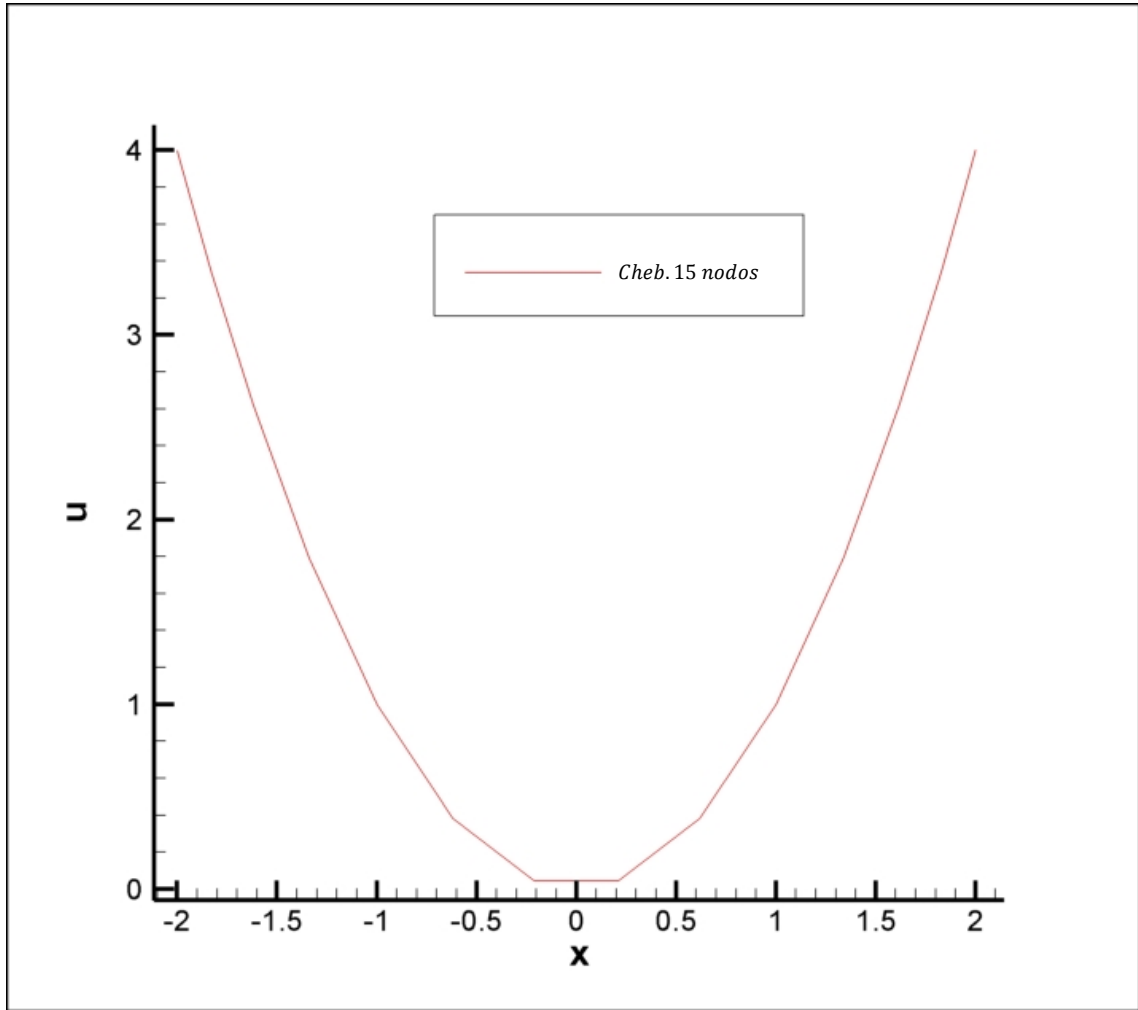


Figura 12 Integración de ecuación diferencial por el método de colocación espectral con cambio de métrica

3.3.- PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

Una vez visto como implementar todo lo desarrollado para problemas unidimensionales podemos pasar a resolver los problemas con dominio 2D.

Para resolver el problema genérico

$$Lu \equiv -\alpha \Delta u + \beta \cdot \nabla u + \lambda u = F \quad \text{en } \Omega$$

$$cc : \begin{cases} u = a \\ \text{o} \\ \frac{d^n u}{dx_i^n} = b \end{cases} \quad \text{en } \partial\Omega$$

Donde α y β son vectores, lo primero que tenemos que hacer es plantear el operador diferencial. Después de esto solo nos falta implementar las condiciones de contorno en las filas adecuadas de la matriz del problema para dos variables.

Así para imponer condiciones de contorno tipo Dirichlet en $u(x0,:)$ o en $u(xf,:)$ sustituimos las filas correspondientes de la matriz L por:

[illegible]

Las condiciones de contorno Dirichlet en $u(\cdot, y_0)$ y en $u(\cdot, y_f)$ se imponen fácilmente.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}_{en\ y0} \dots \begin{pmatrix} u(0,0) \\ u(1,0) \\ \vdots \\ u(Nx,0) \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \text{-----} \\ u(0,Ny) \\ u(1,Ny) \\ \vdots \\ u(Nx,Ny) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(y0) \\ u(y0) \\ \vdots \\ u(y0) \\ \text{-----} \\ \vdots \\ \text{-----} \\ u(yf) \\ u(yf) \\ \vdots \\ u(yf) \end{pmatrix}$$

Las condiciones tipo Neumann son algo más complicadas de implementar. En el caso de condición de contorno en $u_x(x0,:)$ las filas correspondientes se sustituyen por

$$\begin{pmatrix} Dx(0,0) & Dx(0,1) & \dots & Dx(0,Nx) & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & & & & \\ & & & & Dx(0,0) & Dx(0,1) & \dots & Dx(0,Nx) & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ & & \cdot & & & & & & Dx(0,0) & Dx(0,1) & \dots & Dx(0,Nx) \\ & & \cdot & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

Si las condiciones son tipo Neumann aplicadas para $u_y(:,yf)$

$$\begin{pmatrix} \cdot & & & & \cdot & & & & \cdot & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & & \\ Dy(Ny,0) & 0 & \cdot & 0 & Dy(Ny,1) & 0 & \cdot & 0 & Dy(Ny,Ny) & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & Dy(Ny,0) & \cdot & 0 & 0 & Dy(Ny,1) & \cdot & 0 & 0 & Dy(Ny,Ny) & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & Dy(Ny,0) & 0 & 0 & \cdot & Dy(Ny,1) & 0 & 0 & \cdot & Dy(Ny,Ny) \end{pmatrix}$$

Veamos ahora un ejemplo. Este problema ha sido extraído del libro de Trefethen

$$\begin{aligned} \nabla^2 u &= 10 \cdot \sin(8 \cdot x \cdot (y-1)) & \text{en } \Omega = [-1, 1] \times [-1, 1] \\ u &= 0. & \text{en } \partial\Omega \end{aligned}$$

El problema discretizado quedaría

$$\left(\begin{array}{c} \nabla^2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} U \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c} F(u) \end{array} \right)$$

Sobre la que quedaría aplicar las condiciones de contorno tal como se vio en el apartado anterior. Su solución numérica, usando las técnicas anteriormente descritas es la que se muestra en la figura [Fig. 14]

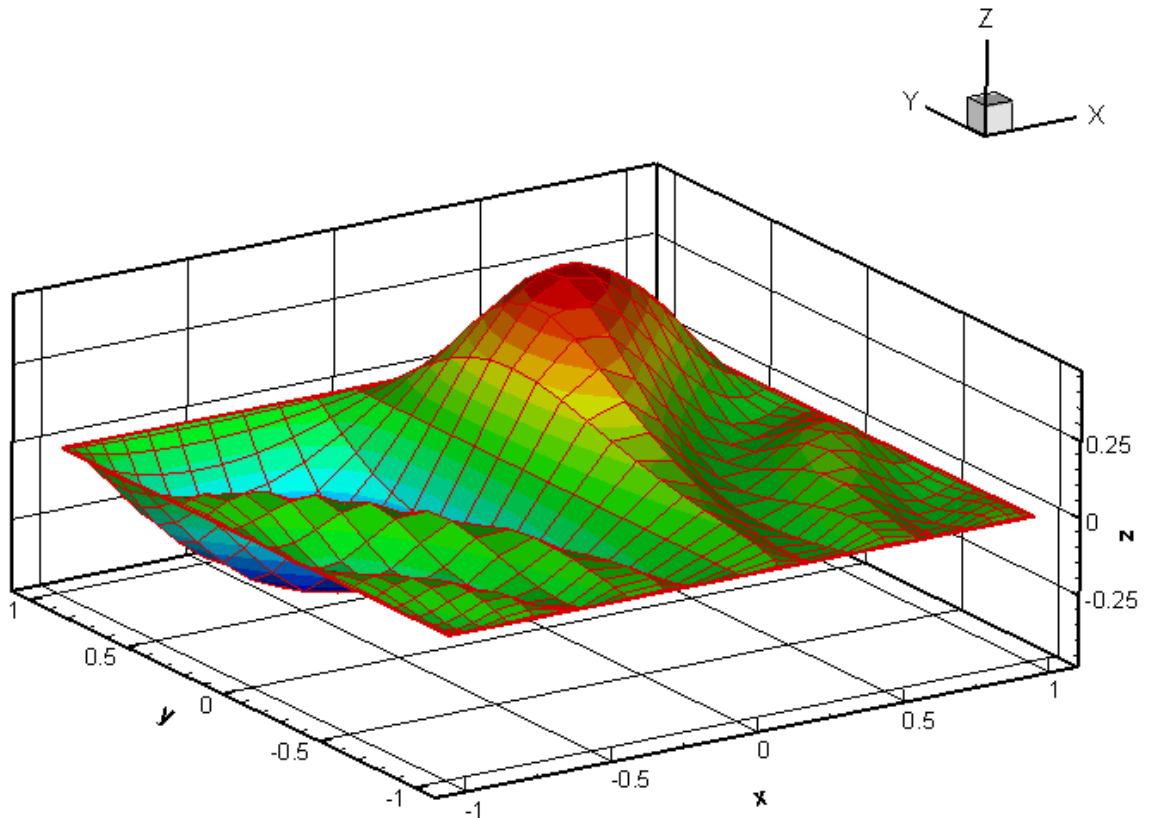


Figura 14 Resolución numérica del problema $\nabla^2 u = 10 \sin(8x(y-1))$

Supongamos que tenemos ahora el siguiente problema

$$U_{xx} + U_{yy} = 0 \quad \text{en } [1,2] \times [0,2\pi]$$

en el que el dominio está expresado en coordenadas polares y con condiciones de contorno

$$U(r = 1, \theta) = 0 \quad (\text{Condición a la frontera interior})$$

$$U(r = 2, \theta) = 1 \quad (\text{Condición a la frontera exterior})$$

Es claro que tenemos que realizar un cambio a coordenadas polares. Cuando realizamos el cambio se nos plantea un nuevo problema. En la figura [Fig. 15] vemos el cambio de coordenadas realizado. Están señaladas en distintos colores las fronteras para ver que simboliza cada una de ellas con el nuevo cambio de variables.

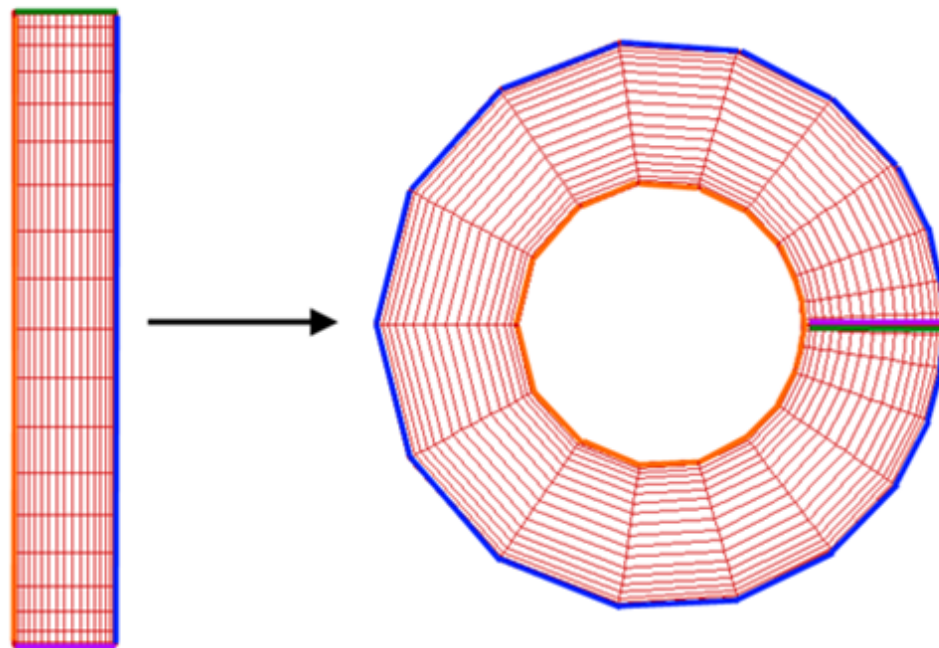


Figura 15 Representación gráfica del cambio de coordenadas

La frontera interior y exterior (azul y naranja en [Fig. 15]) no sufren cambios. Siguen siendo fronteras físicas en las que tendremos que imponer alguna condición. En cambio las fronteras superior e inferior (verde y violeta en [Fig. 15]) dejan de tener sentido

físico. Por otro lado ahora estos puntos ($\theta = 0$, $\theta = 2\pi$) coinciden. Por tanto tengo que establecer condiciones de contorno matemáticas, de periodicidad.

Si estos puntos son los mismos es lógico suponer que tanto su valor como el de su derivadas deben coincidir. Impondremos condiciones de contorno tipo Dirichlet y Newman

$$F(r, \theta = 0) = F(r, \theta = 2\pi)$$

$$F'(r, \theta = 0) = F'(r, \theta = 2\pi)$$

Para imponer la igualdad en función

$$\begin{pmatrix} & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & & \\ 1 & 0 & . & 0 & . & . & . & . & -1 & 0 & . & 0 \\ 0 & 1 & . & 0 & . & . & . & . & 0 & -1 & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & 1 & . & . & . & . & 0 & 0 & . & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u(0,0) \\ u(1,0) \\ . \\ u(Nx,0) \\ \text{-----} \\ . \\ . \\ \text{-----} \\ u(0, Ny) \\ u(1, Ny) \\ . \\ u(Nx, Ny) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u(y0) \\ u(y0) \\ . \\ u(y0) \\ \text{-----} \\ . \\ . \\ \text{-----} \\ 0 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$$

En lo que respecta a la igualdad en derivada

$$\begin{pmatrix} D_{yy}(0,0) - D_{yy}(Ny,0) & 0 & . & 0 & D_{yy}(0,1) - D_{yy}(Ny,1) & 0 & . & 0 & D_{yy}(0,Ny) - D_{yy}(Ny,Ny) & 0 & . & 0 \end{pmatrix}$$

Con el vector de términos independientes

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \vdots \\ \hline u(yf) \\ u(yf) \\ \vdots \\ u(yf) \end{pmatrix}$$

Aplicando todo lo anterior se obtiene [Fig. 16]

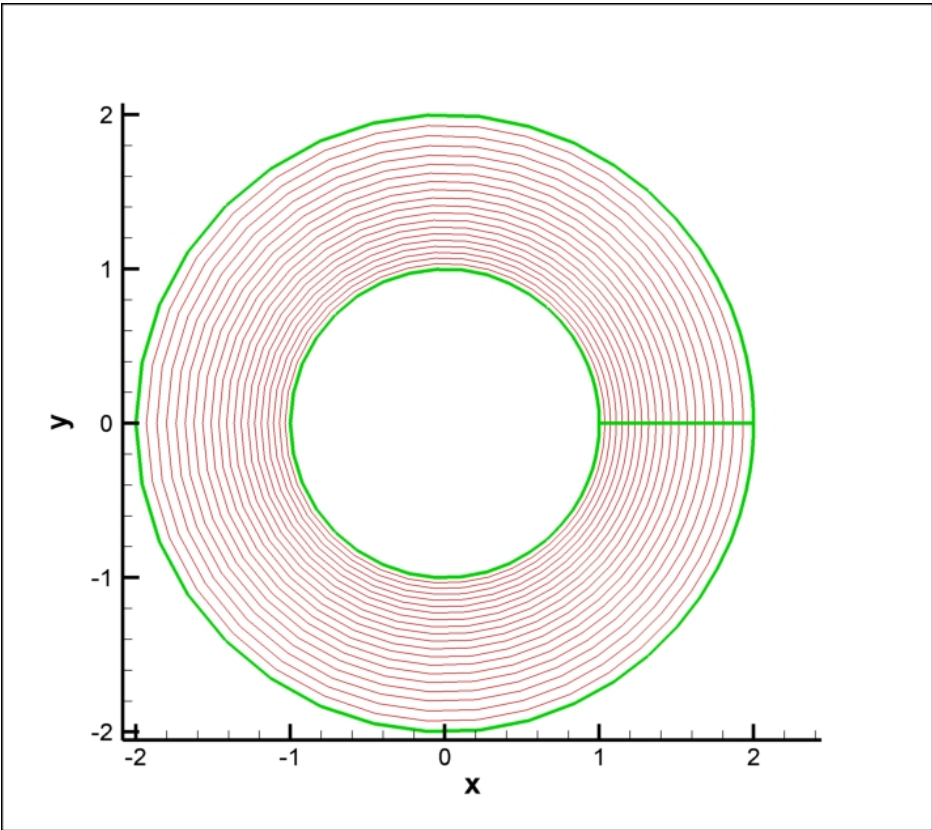


Figura 16 Resolución numérica de $U_{xx} + U_{yy} = 0$ utilizando cambio de coordenadas

Como puede observarse, la condición de contorno “artificial” de igualdad en función y derivada se cumple perfectamente.

4.- PROBLEMAS DE EVOLUCIÓN

Todos los problemas físicos tienen una variable común que es el tiempo. A veces esta dependencia puede obviarse de manera que podemos resolver el problema como estacionario mientras que en otras ocasiones el tenerla en cuenta es completamente necesario. Un problema de evolución será aquel en el que la evolución temporal (la manera en que el problema cambia según avanza el tiempo) es tomada en cuenta.

Un claro ejemplo de esta ambivalencia aparece en el cálculo estructural. El cálculo estático es una utopía ya que absolutamente todos los problemas estructurales son dinámicos. El considerar el problema como estático o dinámico depende de la relación existente entre la evolución temporal de las fuerzas aplicadas sobre la estructura y las características internas de la propia estructura.

Otro ejemplo de este doble comportamiento lo tenemos en los materiales poliméricos. Ante una fuerza de tensión constante su deformación va aumentando con el tiempo. Dependiendo del periodo de aplicación de carga de nuestro problema deberemos considerar o no la evolución temporal.

En los apartados anteriores hemos conseguido desarrollar un método para integrar o diferenciar numéricamente con precisión espectral. En problemas de ecuaciones en derivadas parciales la componente espacial la seguiremos tratando con técnicas espectrales mientras que la evolución temporal la modelizaremos a través de dos métodos: Euler explícito y Euler implícito.

4.1.- INTEGRADORES TEMPORALES

No realizaremos un estudio detallado de estos métodos ya que el objetivo de este trabajo se centra más en los métodos espectrales de la discretización espacial. La elección de los integradores Euler dentro del amplio espectro de procedimientos disponibles atiende a su sencillez.

El objetivo de este apartado es plantear los métodos Euler para resolver la ecuación diferencial ordinaria de primer orden

$$\frac{dy}{dt} = f(y, t)$$

Sujeta a la condición inicial

$$y(0) = Y_0$$

Escribamos la ecuación de la forma

$$dy = f(y, t)dt$$

Si integramos esta ecuación entre los valores t_k y t_{k+1} , partiendo de que estamos en el paso $k + 1$ del proceso recursivo y por tanto conocemos el valor de $y(t_k)$ que denotaremos por simplicidad y_k , entonces obtenemos el valor de $y(t_{k+1})$ que denotaremos como y_{k+1} , como se muestra a continuación

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} dy = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y, t)dt$$

Lo cual resulta

$$y_{k+1} - y_k = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y, t)dt$$

De donde finalmente obtenemos

$$y_{k+1} = y_k + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y, t)dt$$

Esta última ecuación es la base para obtener los métodos de paso simple.

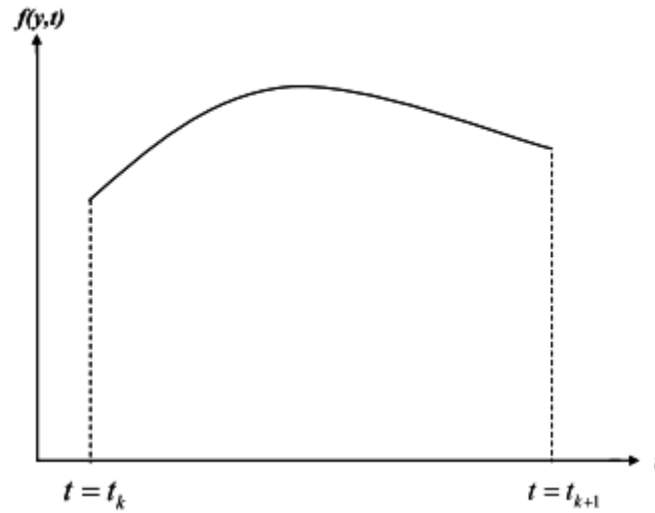


Figura 17 Representación gráfica de la función $f(y, t)$

Existen varias maneras de aproximar la integral de la curva $f(y, t)$ en el intervalo.

1.- Aproximación por una recta constante e igual a la ordenada en el punto t_k , es decir

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y, t) dt = f_k(t_{k+1} - t_k)$$

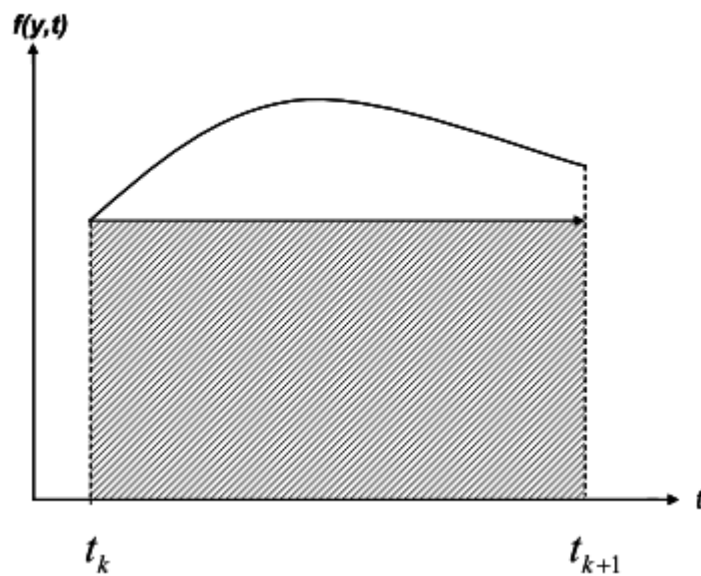


Figura 18 Integración hacia delante de la función $f(y, t)$

Si definimos la diferencia $(t_{k+1} - t_k)$ como Δt , que es el paso de integración, entonces obtenemos la ecuación recursiva del método de Euler

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t \cdot f_k$$

La ecuación anterior es la forma recursiva del método denominado Euler hacia adelante o Euler explícito.

2.- Aproximación por una recta constante e igual a la ordenada en el punto t_{k+1} , es decir

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y, t) dt = f_{k+1}(t_{k+1} - t_k)$$

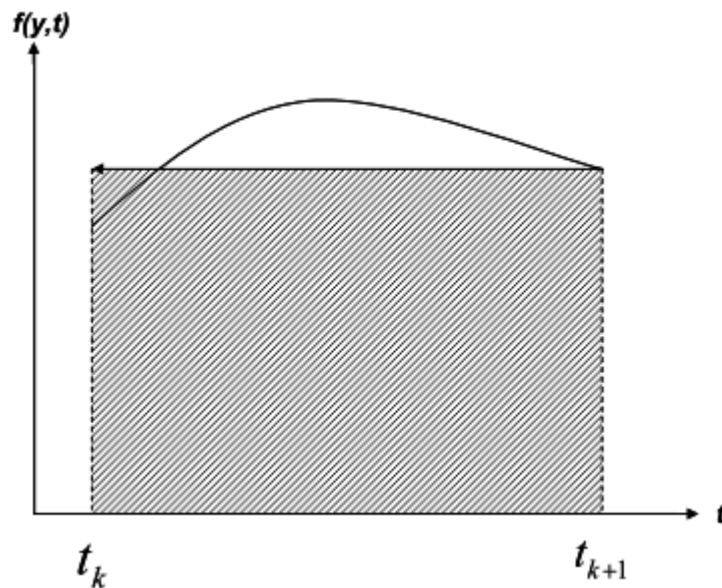


Figura 19 Integración hacia atrás de la función $f(y, t)$

Así que tenemos

$$y_{k+1} = y_k + \Delta t \cdot f_{k+1}$$

La ecuación anterior es la forma recursiva del método denominado Euler hacia atrás o Euler implícito.

Para un estudio más detallado sobre convergencia, estabilidad y estimación del error de estos métodos el libro de Lambert es muy buena referencia.

4.2.- PROBLEMAS UNIDIMENSIONALES

Comenzaremos resolviendo algunos problemas unidimensionales para continuar con el esquema de orden creciente de dificultad seguido a lo largo del proyecto.

4.2.1.- ECUACIÓN DEL CALOR EN UNA VARILLA

El primer problema que nos planteamos es la transmisión de calor en una varilla unidimensional. La ecuación que vamos a ver es un modelo matemático (quizás el más sencillo) que trata de describir la evolución de la temperatura en un cuerpo sólido. El modelo propuesto por Fourier puede sintetizarse así:

- a) La energía necesaria para realizar un incremento de temperatura ΔT sobre un trozo de barra de longitud Δl depende de $\Delta T \Delta l$
- b) La energía fluye de las zonas de mayor temperatura a las de menor temperatura
- c) La energía se conserva

La ecuación resultante que modeliza la transmisión del calor en una varilla con el tiempo es

$$F(T) = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

Vamos a resolver este problema utilizando para la integración temporal Euler explícito y para la derivación espacial Chebyshev. De manera que tenemos

$$F(T) = \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta T} = \frac{\partial^2 T^n}{\partial x^2}$$

Utilizando las matrices de derivación de Chebyshev

$$F(T) = \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta T} = D^2 T^n$$

Y despejando

$$T^{n+1} = T^n + \Delta T \cdot D^2 T^n$$

Si utilizamos como integrador un método Euler explícito como es el caso la manera de imponer las condiciones de contorno consiste en ignorar la evolución de los extremos.

Vamos a utilizar la ecuación del calor en una varilla unidimensional de coordenadas extremo $x = 0, x = 1$. En el instante inicial la varilla tendrá una temperatura igual a cero. Los extremos del intervalo los consideraremos “calientes” con una temperatura $T = 1$

Utilizando las condiciones de contorno en nuestro intervalo $[0,1]$

$$T(0) = 1$$

$$T(1) = 1$$

Y condición inicial de la varilla

$$T(x) = 0$$

Obtenemos el siguiente resultado en función del tiempo [Fig. 20]

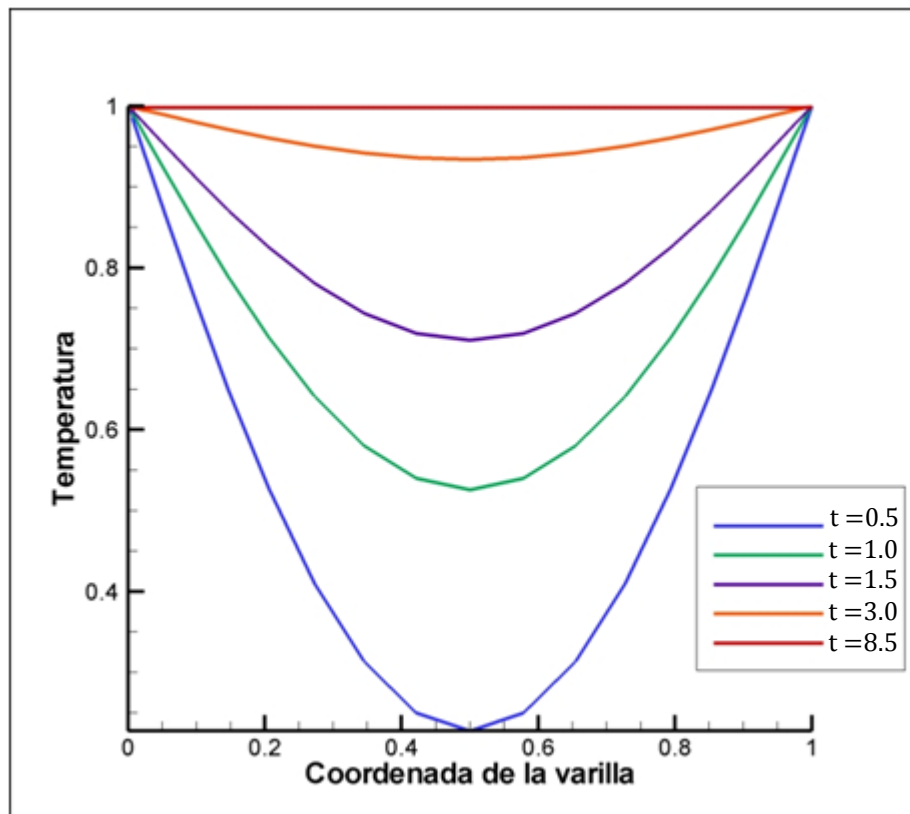


Figura 20 Temperatura en una varilla a lo largo del tiempo

En la figura puede observarse cómo la barra va incrementando la temperatura en función del tiempo. Es importante señalar que la modelización utilizada tiene en cuenta que cuanto mayor sea la diferencia de temperatura existente entre dos puntos, mayor será el cambio de temperatura de estos puntos en un salto temporal. Es lógico pensar que una barra de acero a 100 °C de temperatura se enfriará antes si la introducimos en un baño de agua fría que si la dejamos enfriar al aire.

4.2.2.- ECUACIÓN DE BURGERS

La ecuación de Burgers es una ecuación diferencial en derivadas parciales fundamental en mecánica de fluidos. Esta ecuación es muy interesante porque es una de las pocas ecuaciones no lineales que tiene solución analítica por lo que se utiliza para comprobar la efectividad de los métodos numéricos. Nosotros la vamos a utilizar para simular la traslación de una onda con pérdida de energía pero puede utilizarse para representar ondas de choque. Para una velocidad u y un coeficiente de viscosidad ν la forma general de la ecuación de Burgers es

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx}$$

Nosotros vamos a resolver el problema de la ecuación de Burgers simplificada eliminando el término que provoca la no linealidad de la ecuación lo que hace que quede algo por encima de los objetivos de este trabajo.

$$u_t + u_x = \nu u_{xx}$$

Al eliminar el término no lineal, la ecuación de Burgers se transforma en la ecuación lineal de onda con viscosidad. Realmente esta será nuestra primera toma de contacto con la ecuación de convección difusión (en este caso en un problema unidimensional). El término u_x es el llamado término convectivo que es el que se encarga de la traslación de la onda. El término u_{xx} es el término difusivo. Es el que se encarga de suavizar la onda y reflejar la pérdida de energía que tiene con el tiempo. El factor ν que representa la viscosidad es el que decide lo rápido que se amortiguará la onda. Un ν alto implica una amortiguación rápida mientras que valores bajos de ν proporcionarán una onda que apenas perderá energía.

Para resolver el problema realizaremos la integración temporal con un Euler explícito. En cuanto a la derivación espacial aprovecharemos para realizar una comparación entre Chebyshev y diferencias centradas.

Con una condición inicial como la dada en la figura [Fig. 21]

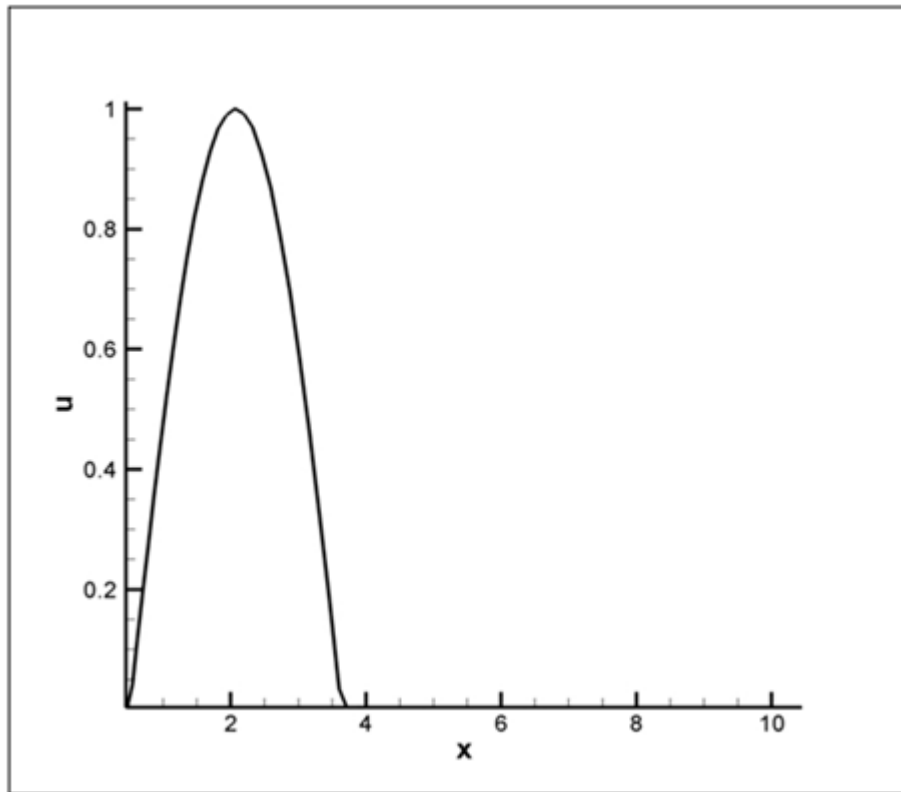


Figura 21 Condición inicial aplicada en la resolución de la ecuación de onda con viscosidad

Condición inicial

$$U(x, t = 0) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x < \pi \\ 0 & \text{si } x \geq \pi \end{cases} \quad [0,10]$$

Condición de contorno

$$u(0) = 0$$

Resolvemos primero la ecuación tomando $\nu = 0$. Utilizando Chebyshev con 100 nodos obtenemos [Fig. 22]

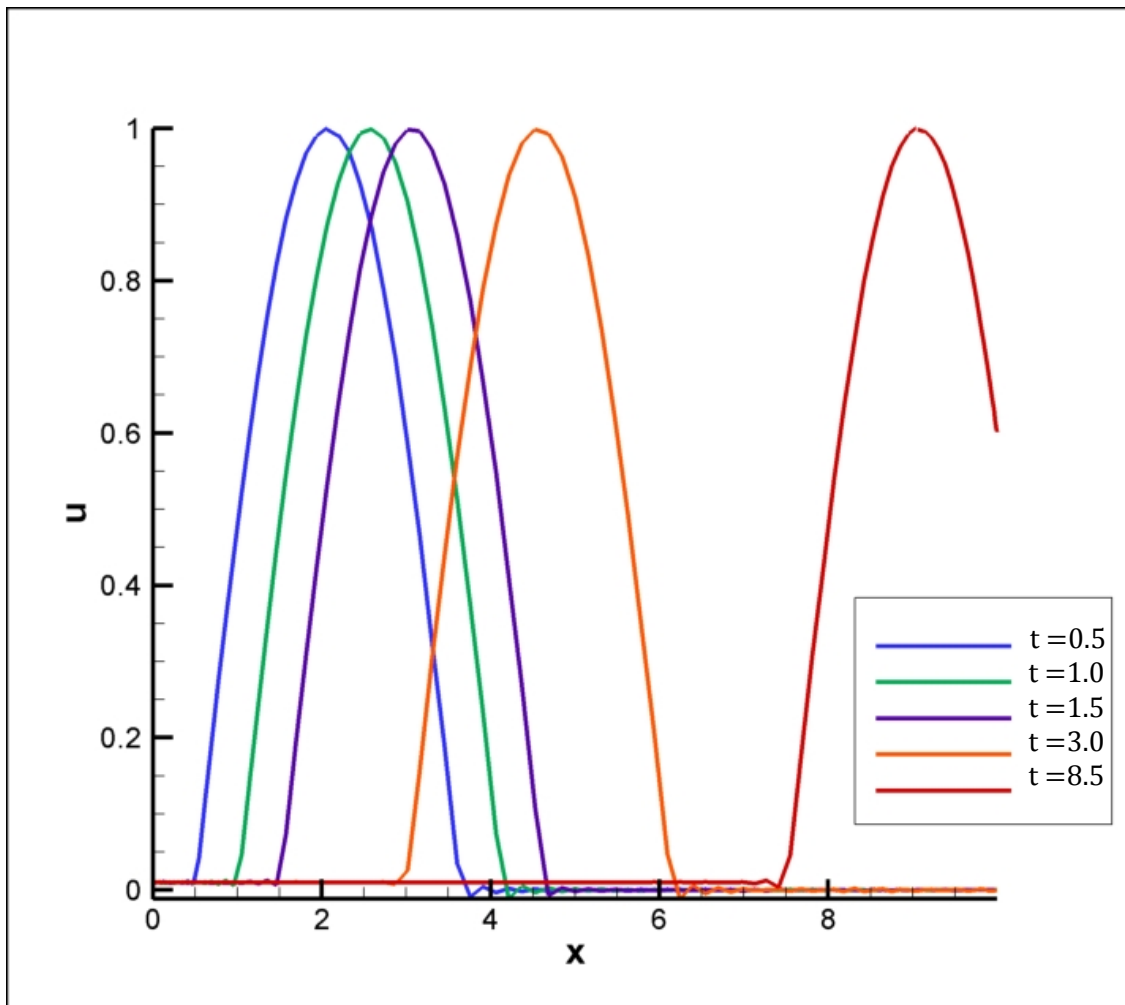


Figura 22 Resolución de la ecuación de onda sin viscosidad por Chebyshev

Como la viscosidad la hemos tomado como nula, vemos que la onda no pierde altura ya que no hay disipación de energía. Podemos observar una pequeña oscilación antes y después de la onda que es debida a que el método utilizado no es exacto al usar una serie truncada. La oscilación aparece justo en la zona en la que se produce la discontinuidad en derivada porque es la zona más difícil de aproximar.

Vamos ahora a solucionar el problema utilizando diferencias centradas dividiendo el intervalo también en 100 nodos [Fig. 23]

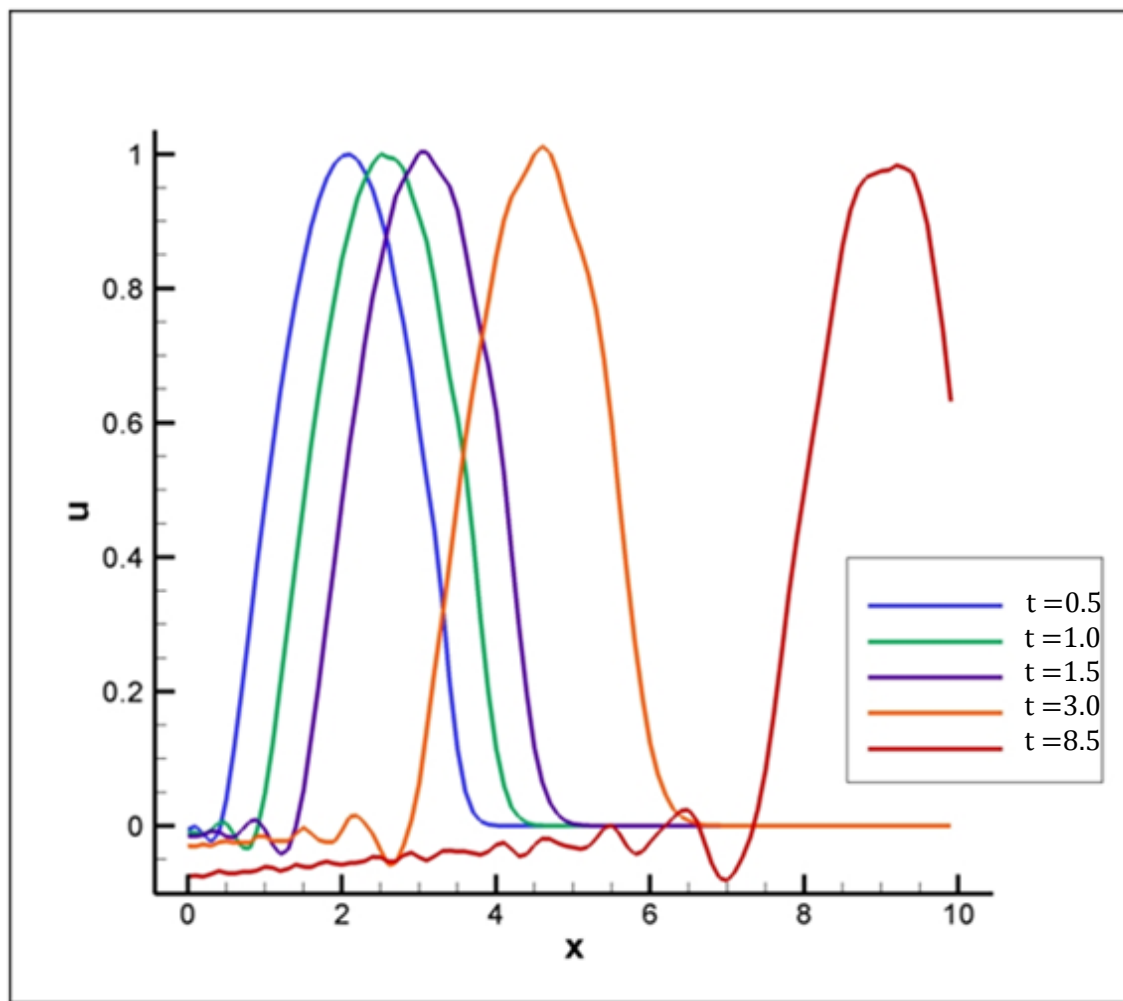


Figura 23 Resolución de la ecuación de onda sin viscosidad por diferencias finitas

Podemos comprobar la mejora de precisión obtenida con el mismo número de puntos. La oscilación aquí es mucho mayor. Esto es debido a que al tomar un método de diferencias finitas de bajo orden la precisión es mucho menor. También se produce un error en el extremo superior de la onda por el mismo motivo.

Vamos ahora a ver ahora cómo afecta la viscosidad al problema. Cambiaremos el valor anterior de la viscosidad (recordemos $\nu = 0$) por $\nu = 0.01$ y manteniendo el resto del problema invariable.

Resolvemos el problema por Chebyshev con 100 nodos al igual que en el caso anterior [Fig. 24]

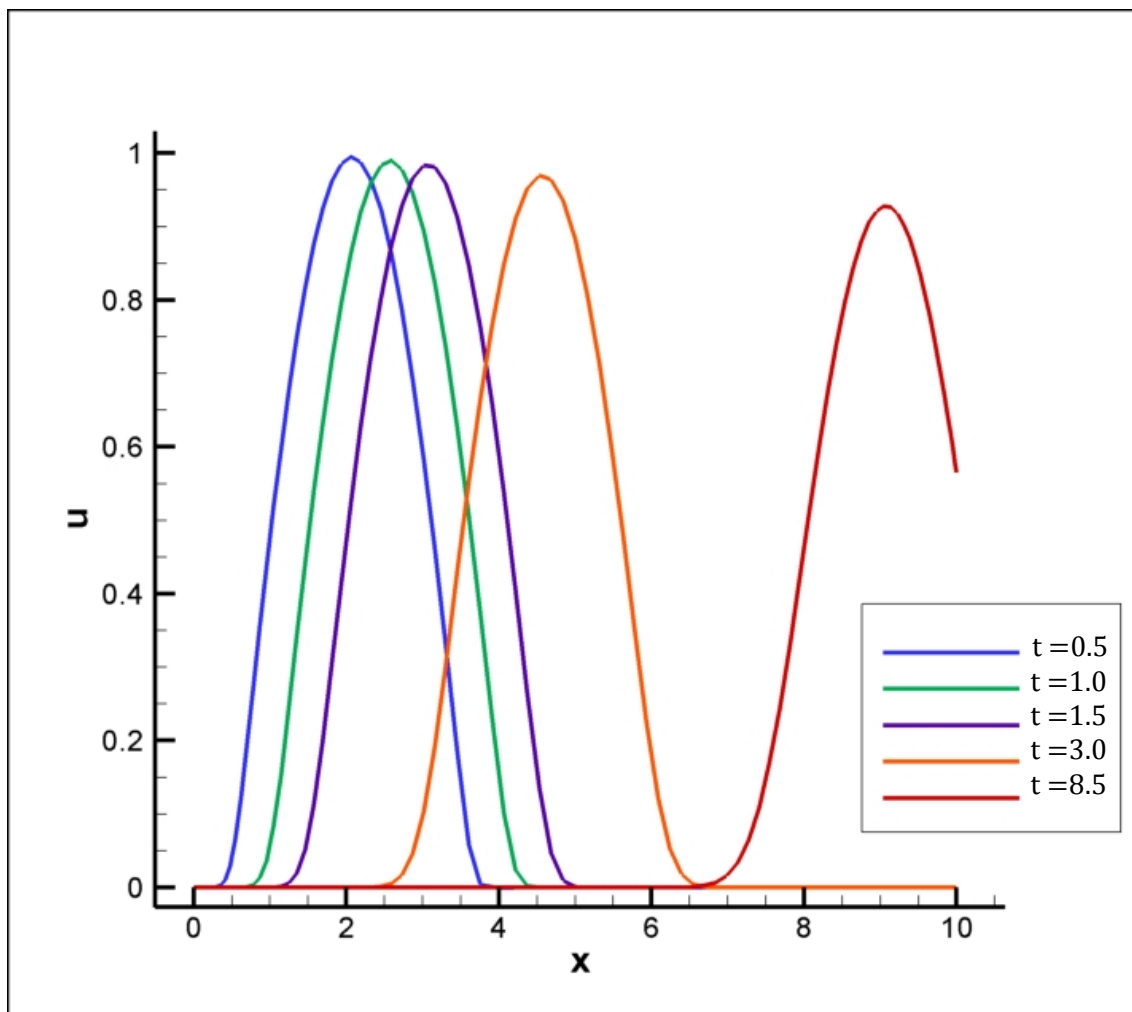


Figura 24 Resolución de la ecuación de onda con viscosidad por Chebyshev

Vemos que ahora sí que se produce una disminución de la altura de la onda debido a la pérdida de energía. Además, el efecto “suavizador” de la viscosidad ha corregido el error de vibración introducido anteriormente. Esto es importante ya que hay que señalar que al introducir un término de viscosidad se presentan dos fenómenos: la viscosidad física y la viscosidad numérica. La viscosidad física “suavizará” el problema independientemente de la precisión del método. En cambio, la viscosidad numérica será mayor cuanto peor sea la precisión del método.

Si lo resolvemos ahora utilizando diferencias centradas obtenemos [Fig. 25]

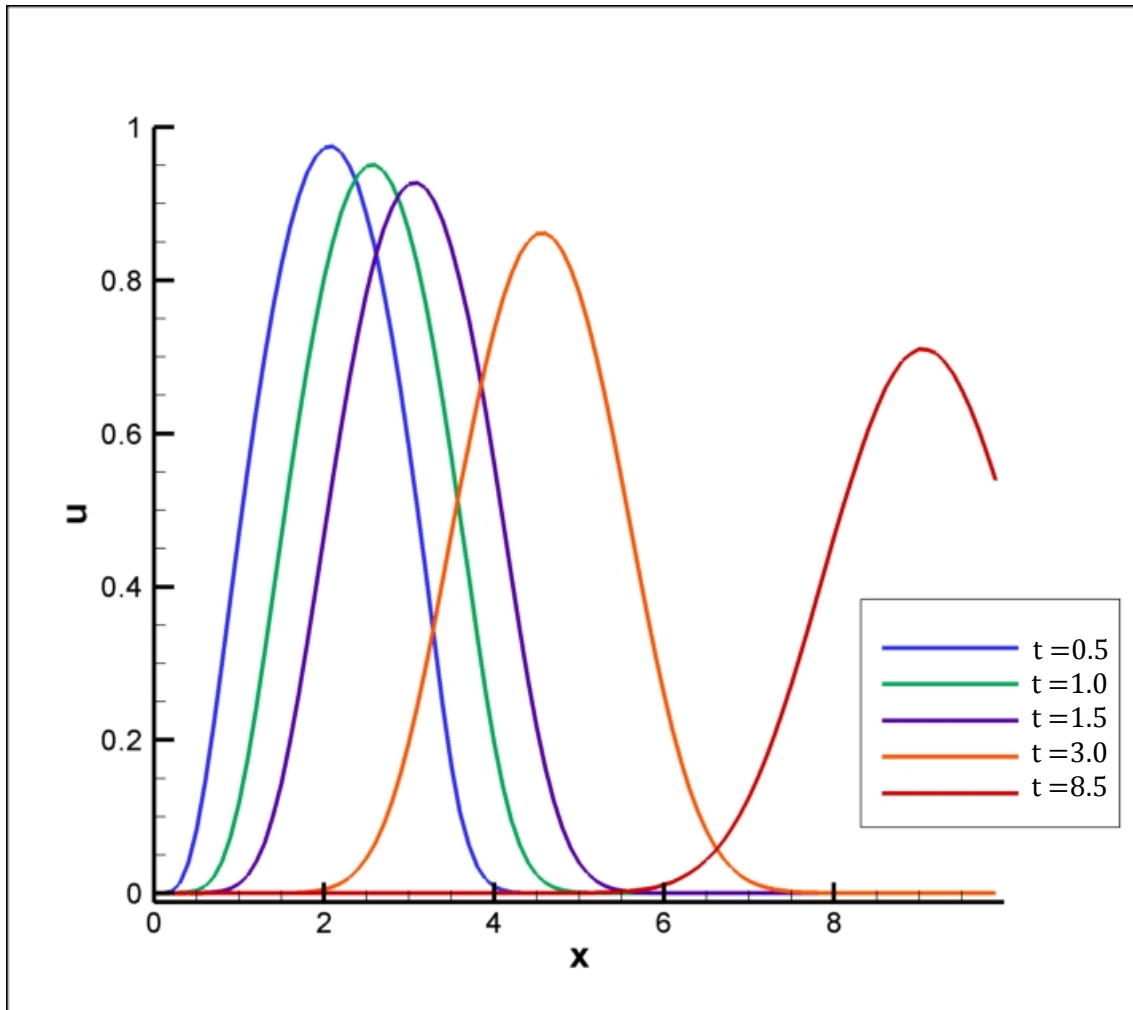


Figura 25 Resolución de la ecuación de onda con viscosidad por diferencias finitas

Al igual que en el caso anterior, hemos obtenido una mejora de los resultados por el suavizado producido por la viscosidad. En este caso la altura perdida por la onda es mucho mayor y eso es debido al efecto que antes comentábamos. El fenómeno de la viscosidad numérica se introduce en algunos problemas para eliminar oscilaciones no deseadas.

Como último comentario sobre este problema se puede observar que el avance de la onda no varía con la viscosidad.

4.3.- PROBLEMAS BIDIMENSIONALES

Nos vamos acercando al objetivo final de este trabajo. Seguimos aumentando la complejidad de los problemas y el siguiente paso será pasar a dos variables.

4.3.1.- ECUACIÓN DE DIFUSIÓN

La ecuación que modeliza la transmisión del calor en una superficie plana con el tiempo es

$$F(T) = \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T$$

O lo que es lo mismo

$$F(T) = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Como vemos esta ecuación no es más que una generalización de la ecuación vista anteriormente para una sola variable.

Vamos a resolver este problema utilizando para la integración temporal Euler implícito discretizando el operador Laplaciano usando las matrices de derivación. De manera que tenemos

$$F(T) = \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta T} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Utilizando las matrices de derivación de Chebyshev

$$F(T) = \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta T} = D_x^2 T^{n+1} + D_y^2 T^{n+1}$$

Y despejando

$$[I - \Delta T(D_x^2 + D_y^2)]T^{n+1} = T^n$$

O lo que es lo mismo

$$[I - \Delta T \nabla^2]T^{n+1} = T^n$$

Hemos vuelto a transformar nuestro problema en un sistema lineal de ecuaciones de tipo $Ax = b$ donde

$$A = [I - \Delta T \nabla^2]$$

$$x = T^{n+1}$$

$$b = T^n$$

Con lo que cada paso temporal se reduce a resolver un sistema lineal de ecuaciones. Es por esto que interesa tener un método eficiente para resolver este tipo de sistemas. Aunque la descomposición de la matriz A en dos matrices L y U es muy costosa, sólo hay que realizarla una vez al principio del problema (ya que la matriz A no cambia). Los cambios del vector b no afectan a esta descomposición (ver Anexo para más detalles). Ahora las condiciones de contorno las impondremos como explicamos en el apartado 3.3.

La gran ventaja de trabajar con matrices de derivación es que sólo es necesario calcular estas matrices una vez en la resolución de un problema de evolución temporal. Los términos que sufran alguna variación temporal quedarán en el término independiente.

Veamos un ejemplo. Tenemos una placa plana con condiciones de contorno de temperatura en la frontera $T = 0$ y condición inicial temperatura inicial de la placa $T = 1$. Es decir una placa caliente que se enfría debido a la menor temperatura de sus bordes.

Condición inicial

$$T(x, y, t = 0) = 1$$

Condición de contorno

$$T(-0.1, y, t) = 0 \quad [-0.1, 0.1]x[-0.1, 0.1]$$

$$T(x, -0.1, t) = 0$$

$$T(0.1, y, t) = 0$$

$$T(x, 0.1, t) = 0$$

Obtenemos [Fig. 26]

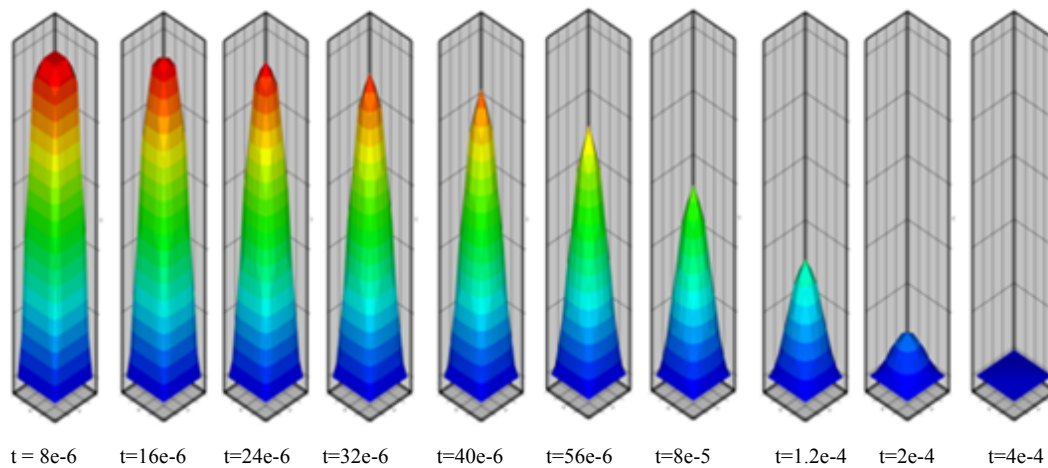


Figura 26 Evolución de la temperatura en una placa plana

El hecho de que tengamos unos intervalos de tiempo tan sumamente pequeños es debido a que en esta ecuación los términos difusivos suelen ir multiplicados por un factor k que aquí no ha sido tenido en cuenta. No tenerla en cuenta es a efectos prácticos usar $k = 1$ con lo que en nuestro problema el tiempo es en realidad $t \cdot k$. Lo que con esto se quiere decir es que en función del tipo de material que esté construida la placa esa difusión será más rápida o más lenta.

Vamos a intentar ahora resolver un problema parecido pero con una geometría distinta. Supongamos que queremos calcular la transmisión de calor en un fluido que se encuentra en un tubo cuya pared interior está caliente y la exterior fría. Por la geometría del problema, es mucho más fácil resolverlo realizando el cambio de métrica a polares explicado en el apartado 2.2.2

Con una condición inicial

$$T(x, y) = 0$$

Y condiciones de contorno

$$T(r = 1, \theta) = 1 \quad [1, 2] \times [0, 2\pi]$$

$$T(r = 2, \theta) = 0$$

Obtenemos [Fig. 27]

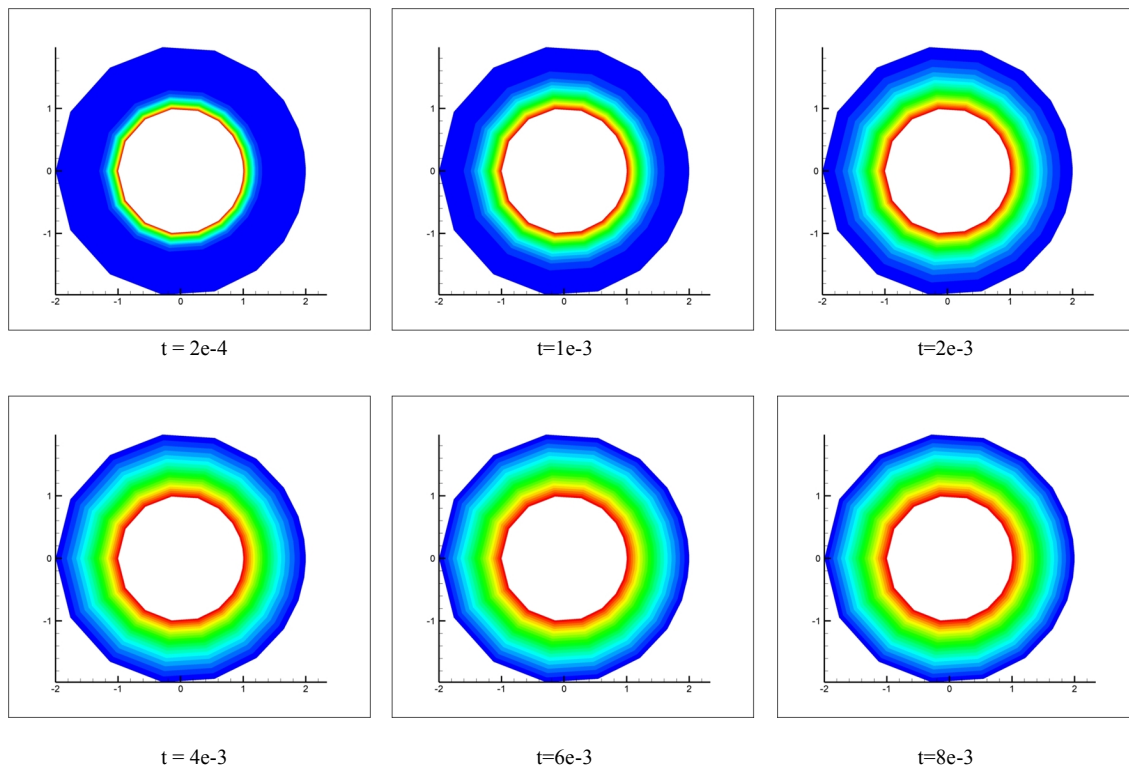


Figura 27 Evolución de la temperatura en un fluido dentro de un tubo

El problema evoluciona hasta alcanzar la condición de equilibrio. La diferencia de valores de t con respecto al problema de placa plana se debe a la diferencia de tamaños de dominio.

4.3.2.- ECUACIÓN DE CONVECCIÓN DIFUSIÓN

Al igual que el apartado anterior podía tomarse como una generalización de la ecuación del calor en una sola variable, este problema es una generalización a las dos dimensiones de la ecuación de Burgers linealizada. Este es el último apartado del proyecto en el que alcanzamos el máximo de complejidad. Vamos a resolver la ecuación de convección difusión en dos dimensiones utilizando un cambio de métrica requerido por la geometría utilizada. Para calcular el campo de velocidades utilizaremos la teoría de movimiento potencial bidimensional de fluidos ideales.

La ecuación que modeliza la transmisión del calor en un campo fluido en movimiento es

$$F(T) = \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla^2 T + \vec{U} \cdot \nabla T$$

O lo que es lo mismo

$$F(T) = \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}$$

Siendo u y v las velocidades en x y en y respectivamente. La ecuación tiene dos partes:

- a) Convectiva: esta parte de la ecuación es la encargada de “arrastrar” la temperatura, de transportar el calor

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}$$

- b) Difusiva: esta parte de la ecuación es la encargada de transmitir el calor en todas las direcciones, de suavizar la convección

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}$$

Vamos a resolver este problema utilizando para la integración temporal Euler pseudoimplícito y discretizando el problema utilizando Chebyshev. En la parte convectiva del problema utilizaremos Euler explícito mientras que en la parte difusiva Euler implícito. Explicaremos esta decisión un poco más adelante. De manera que tenemos

$$F(T) = \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta T} = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y}$$

Utilizando las matrices de derivación de Chebyshev

$$F(T) = \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta T} = D_x^2 T^{n+1} + D_y^2 T^{n+1} + u D_x T^n + v D_y T^n$$

Y despejando

$$[I - \Delta T(D_x^2 + D_y^2)]T^{n+1} = T^n + u D_x T^n + v D_y T^n$$

$$[I - \Delta T \nabla^2]T^{n+1} = T^n + u D_x T^n + v D_y T^n$$

Con lo que volvemos a tener un sistema lineal de ecuaciones de tipo $Ax = b$

$$A = [I - \Delta T \nabla^2]$$

$$x = T^{n+1}$$

$$b = T^n + uD_x T^n + vD_y T^n$$

El hecho de dejar fuera de A los términos convectivos se debe a que estos términos pueden ser variables con el problema (de ahí la utilización de los dos métodos Euler para cada parte). Esto obligaría a recalcular en cada paso la matriz A lo que sería bastante costoso. Además, en un problema general, la velocidad generaría una no linealidad que obligaría a dejar fuera de A estos términos. Este problema de la no linealidad lo hemos solventado calculando el campo de velocidades alrededor del cilindro por la teoría del movimiento potencial bidimensional de fluidos ideales (ver Anexo para más detalles).

Supongamos que tenemos un cilindro caliente en el interior de un campo fluido que se está moviendo de izquierda a derecha. Veamos cómo afecta este cilindro a la temperatura del fluido circundante.

Para resolver este problema procederemos de la siguiente manera:

- a) Cálculo del campo de velocidades alrededor del cilindro mediante la teoría de fluido potencial (desarrollado en el Anexo). En todo el desarrollo se ha tomado como suele ser habitual U_0 (*Velocidad del fluido aguas arriba*) = 1
- b) Cambio de variables a polares para facilitar la definición del dominio utilizando la métrica desarrollada
- c) Aplicación de la condición inicial $T = 0$
- d) Condiciones de contorno

$$T(r_i, \theta) = 1$$

$$T_{rr} \left(r_e, [0, \frac{\pi}{2}] \right) = 0$$

$$T \left(r_e, (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}) \right) = 0$$

$$T_{rr}\left(r_e, \left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]\right) = 0$$

Siendo

$r_i \rightarrow$ Radio del cilindro

$r_e \rightarrow$ Radio de la frontera exterior

Mediante la aplicación de estas condiciones conseguimos que el fluido entre con $T = 0$ y que la salida sea suave. Una imagen puede clarificar la elección de estas condiciones de contorno [Fig. 28]

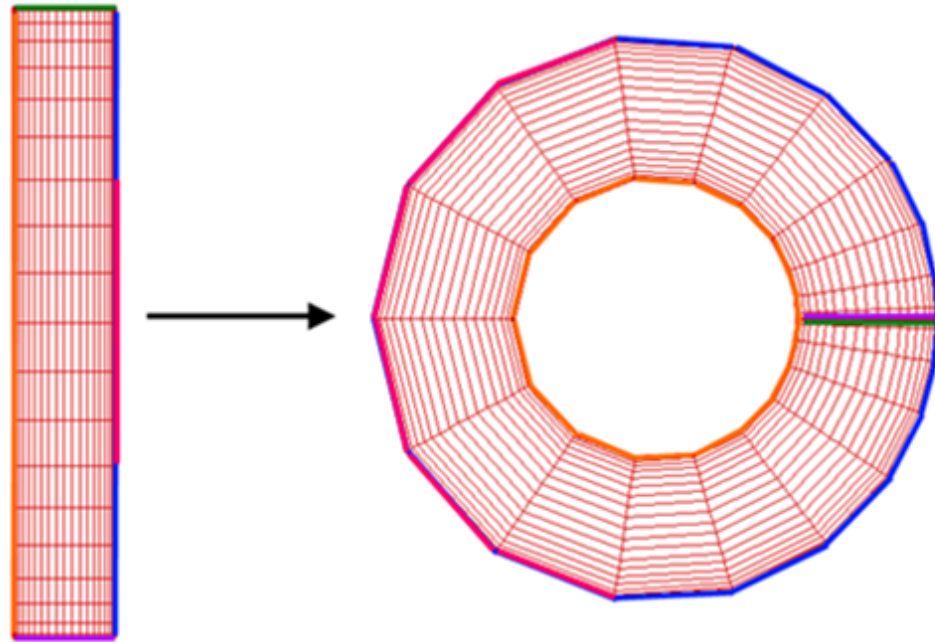


Figura 28 Representación gráfica de las condiciones de contorno aplicadas

En la imagen se ve claramente que si el fluido avanza de izquierda a derecha todo el fluido nuevo que entre vendrá por donde la condición de contorno hace la temperatura 0 (zona rosa). Por otro lado, el fluido perturbado por el cilindro saldrá suavemente por la condición de contorno impuesta a la salida (zona azul).

Veamos el resultado obtenido [Fig. 29] para un dominio de $[1,2] \times [0,2\pi]$

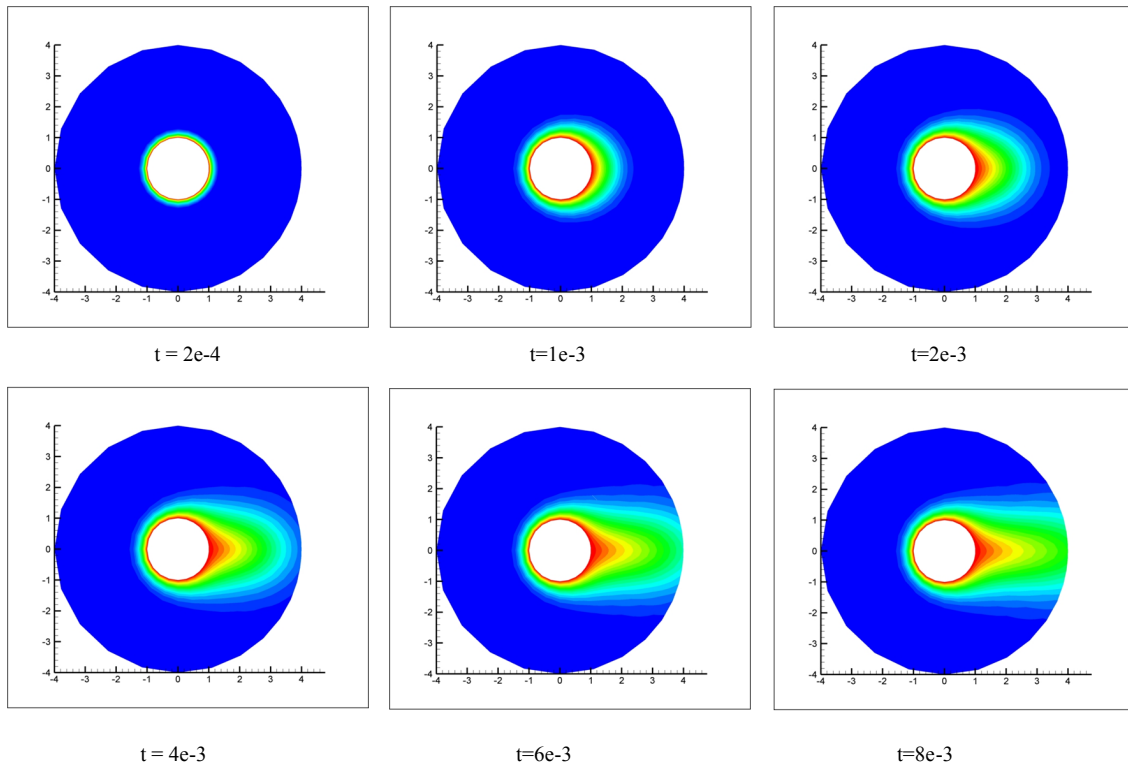


Figura 29 Evolución de la temperatura de un fluido que rodea un cilindro caliente

Vemos que la ecuación modeliza el problema tal como habíamos supuesto. Sobre la relación entre los resultados obtenidos y la realidad estamos muy limitados por cómo ha sido calculado el campo de velocidades. La modelización del problema será bastante buena hasta el punto más alto (y más bajo) del cilindro. En esa zona tendremos capa límite adherida y estaremos cumpliendo las hipótesis del movimiento potencial bidimensional. En la zona posterior del cilindro se presentarán en la realidad desprendimientos de la capa límite y por tanto se formarán torbellinos que harán que el resultado no sea correcto. Esto puede observarse en la siguiente figura [Fig. 30]

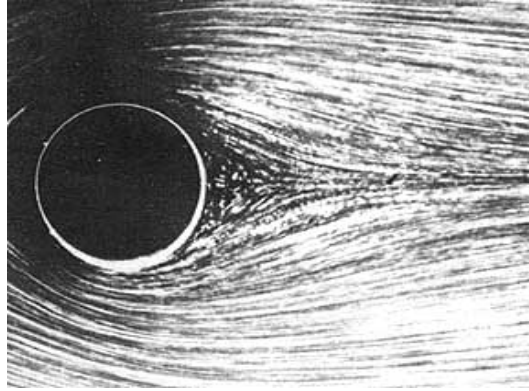


Figura 30 Fluido circulando alrededor de un cilindro (Imagen tomada del libro de Van Dyck)

Si al campo fluido anterior le añadimos un torbellino, conseguimos circulación alrededor del cilindro. Al añadir este torbellino conseguimos que el campo de velocidades adopte la forma que tendría si el cilindro estuviese girando. Este efecto es conocido como efecto Magnus.

Los resultados aquí expuestos [Fig. 31] están conseguidos con una constante Γ de intensidad de torbellino variando armónicamente con el tiempo de manera que la modelización responde a un fluido circulando de izquierda a derecha en cuyo seno existe un cilindro que gira alternativamente a izquierdas y a derechas. Para una explicación más detallada de cómo conseguir el campo de velocidades alrededor de un cilindro en rotación consultar el Anexo.

El dominio utilizado es uno con una diferencia mucho mayor entre el radio del cilindro y el de la frontera exterior para intentar minimizar el efecto de la frontera sobre el problema estudiado. El nuevo dominio será $[1,50] \times [0,2\pi]$

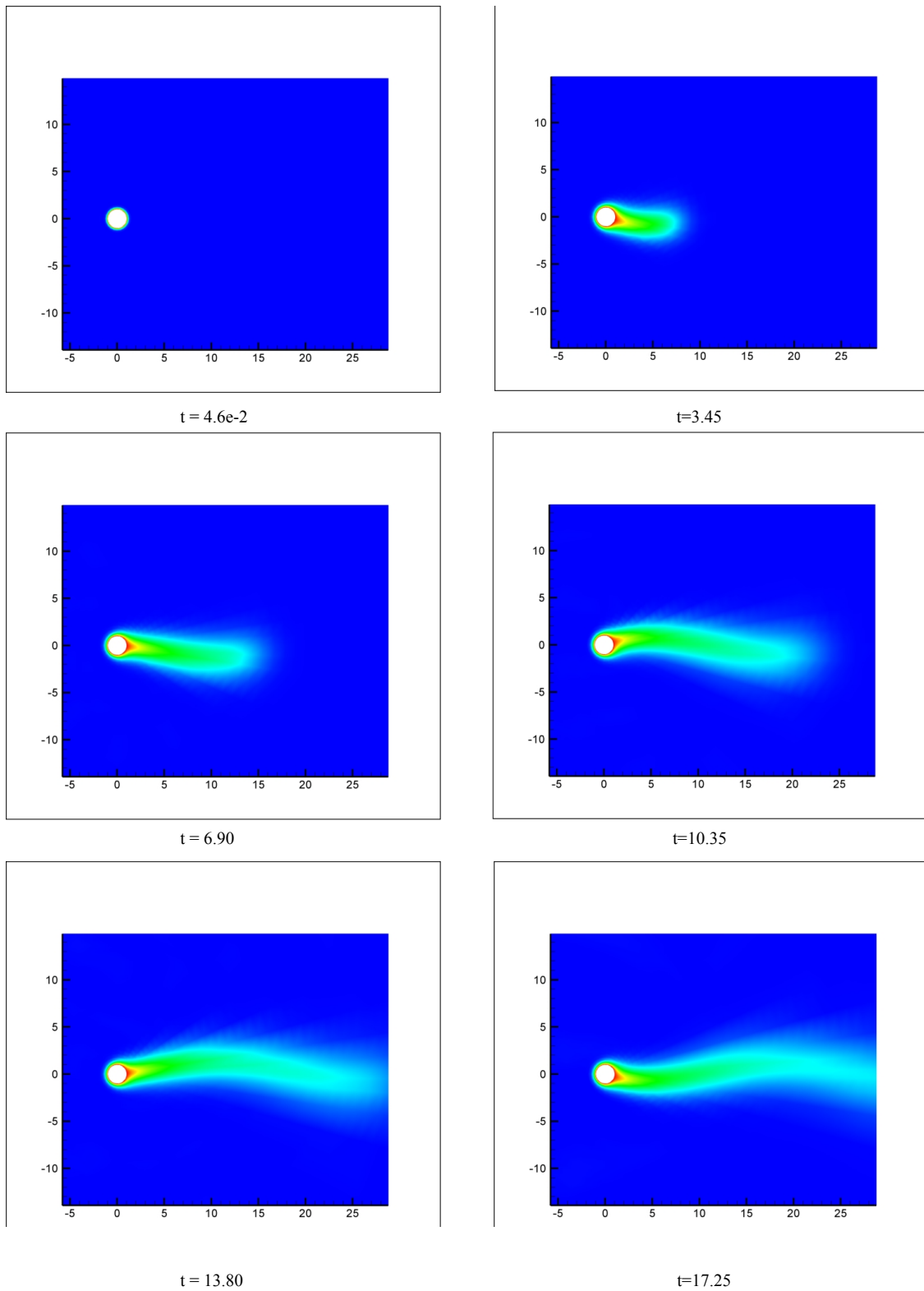


Figura 31 Evolución de la temperatura de un fluido que circula alrededor de un cilindro girando

En la siguiente figura [Fig. 32] se muestran las curvas de nivel

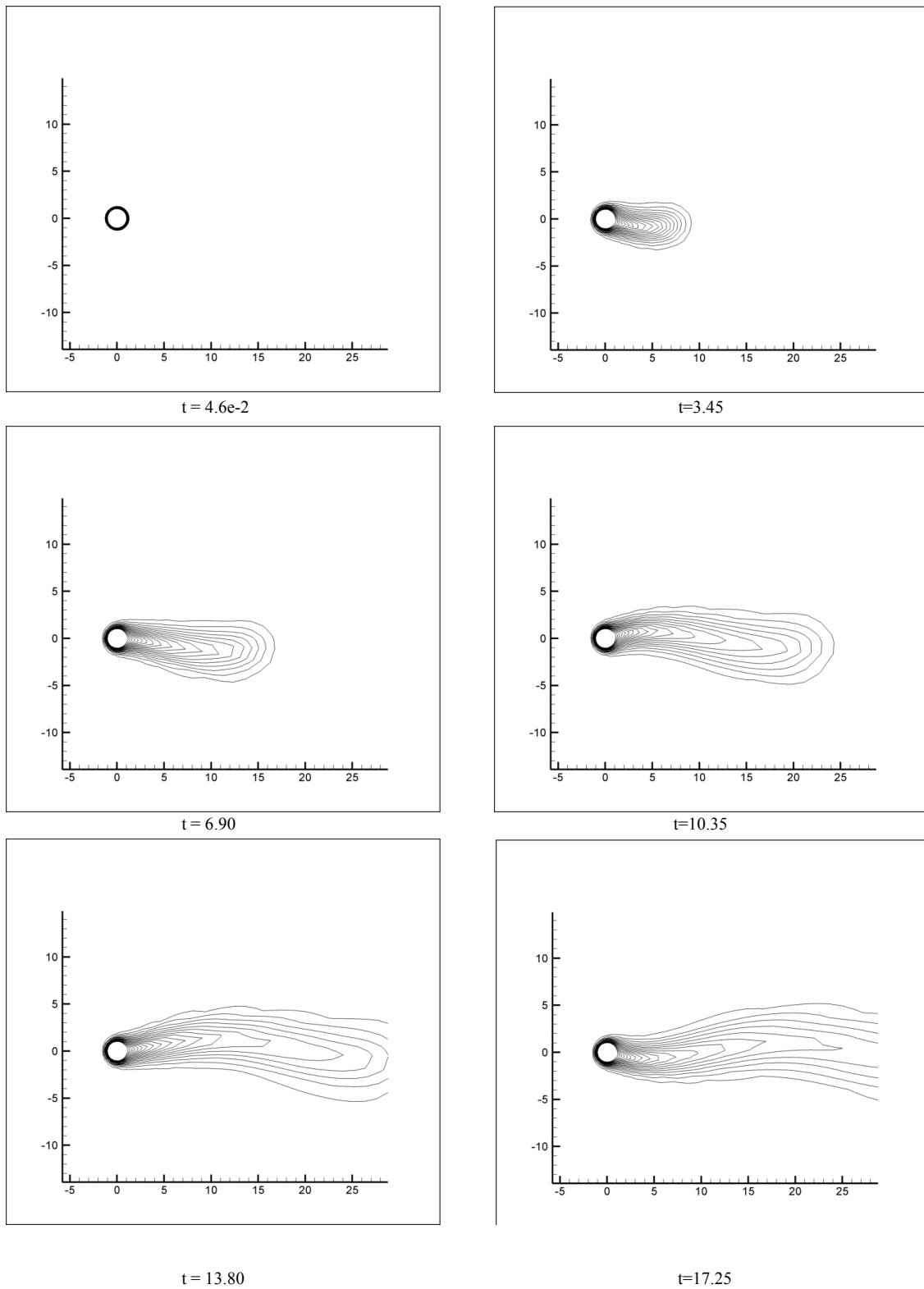


Figura 32 Evolución de la temperatura de un fluido que circula alrededor de un cilindro girando (curvas de nivel)

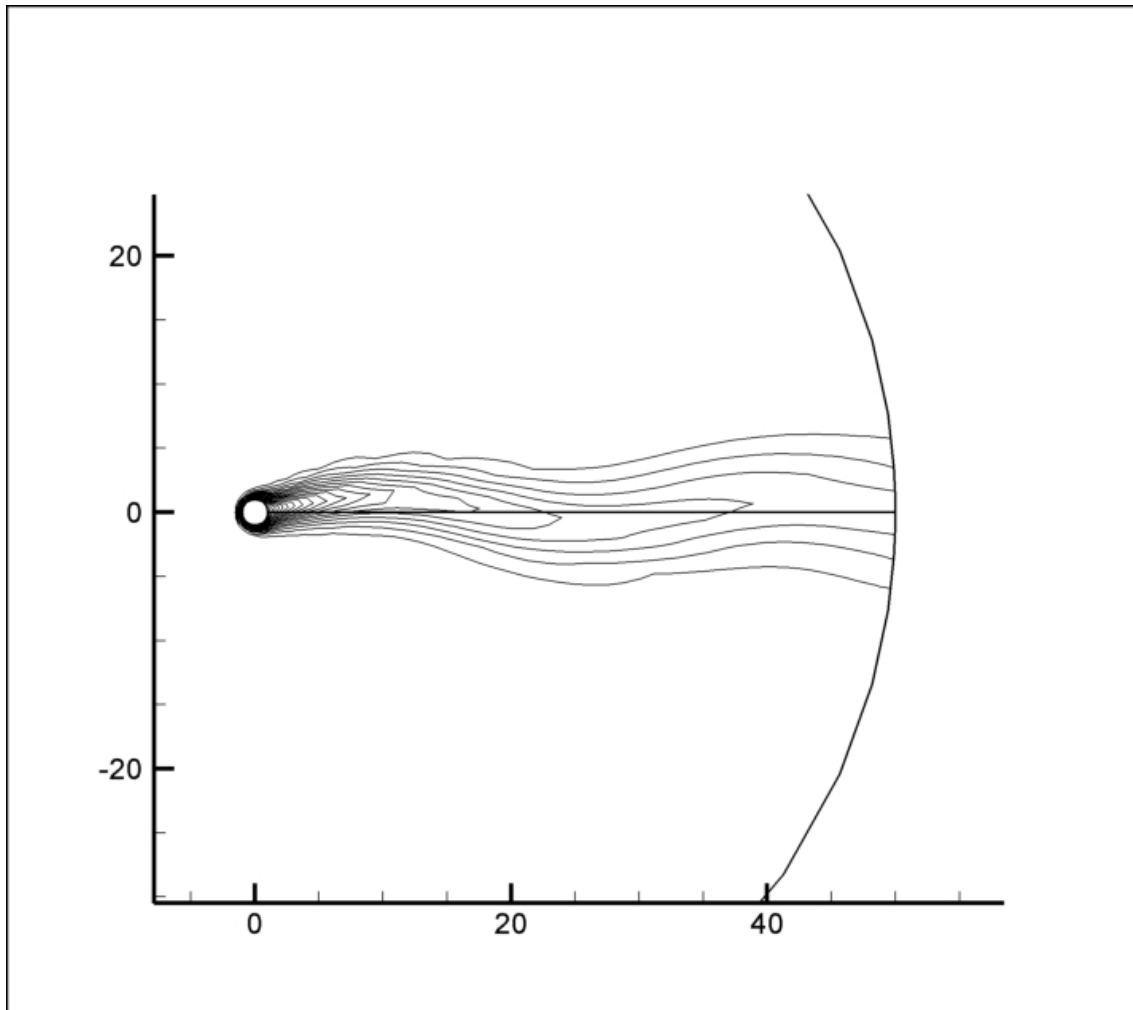


Figura 33 Evolución de la temperatura de un fluido que circula alrededor de un cilindro girando. Condiciones de contorno

Esta figura [Fig. 33] es importante ya que sirve para verificar que la condición de contorno está bien implementada ya que no introduce perturbaciones en la salida.

5.- ANEXO

5.1.- MOVIMIENTO POTENCIAL BIDIMENSIONAL DE FLUIDOS IDEALES

HIPÓTESIS

Las hipótesis bajo las cuales está desarrollado el movimiento potencial bidimensional de fluidos ideales son las siguientes:

a) Fluido ideal

Viscosidad despreciable

$$Re \gg 1$$

b) Estacionario

No se producen variaciones con respecto al tiempo

$$\frac{\partial}{\partial t} = 0$$

c) Bidimensional

No se producen variaciones en planos paralelos

$$\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

d) Irrotacional

$$|\nabla^{\wedge} \vec{v}| = 0$$

e) Incompresible

No se produce variación de la densidad

$$\rho = cte$$

POTENCIAL COMPLEJO

Con este método se pretende conseguir una función compleja de la cual derivará el campo de velocidades. Utilizaremos este potencial complejo para resolver el campo de velocidades de unos ejemplos sencillos que gracias a la linealidad de la ecuación nos permitirán resolver otros más complejos por superposición.

En el movimiento potencial bidimensional las componentes de velocidad, U y W , son

$$U = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \qquad W = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación de continuidad (que en régimen incompresible se reduce a $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$) se obtiene la ecuación diferencial que debe satisfacer el potencial de velocidades

$$\Delta \Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

Ecuación que junto con las condiciones de contorno sobre el obstáculo (velocidad normal nula) y en el infinito ($U = U_\infty$ $W = 0$) permiten encontrar la solución del problema.

Sea una función $f(t)$, analítica de la variable compleja $t = x + iz$

$$f(t) = \Phi(x, z) + i \psi(x, z)$$

Respecto a las condiciones de Cauchy-Riemman, estas se obtienen expresando que, si la función es derivable, su derivada ha de ser la misma cualquiera que sea la dirección elegida. Por tanto

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} + i \frac{\partial \psi}{\partial x} = -i \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

De donde resulta, igualando las partes reales y las imaginarias

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial z}$$

Expresiones que, por derivación cruzada, permiten deducir que tanto la parte real como la parte imaginaria de la función compleja $f(t)$ son soluciones de la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

La parte real del potencial complejo Φ representa el potencial de velocidades de un movimiento plano, mientras que la parte compleja ψ se llama función de corriente y es constante a lo largo de las líneas de corriente.

SOLUCIONES ELEMENTALES

La ecuación de Laplace es lineal por lo que es lícito suponer soluciones elementales para por superposición resolver problemas más complejos.

a) Corriente uniforme. Traslación

$$U = U_{\infty} \cos \alpha$$

$$W = U_{\infty} \sin \alpha$$

$$f(t) = U_{\infty} e^{-i\alpha t}$$

b) Manantial o Sumidero situado en el origen de coordenadas

$$U = \frac{Q}{2\pi r} \cos \theta$$

$$W = \frac{Q}{2\pi r} \sin \theta$$

$$f(t) = \frac{Q}{2\pi} \ln t$$

Si Q es positivo se le llama manantial mientras que si es negativo se llama sumidero. Si la singularidad en vez de estar centrada en el origen está en un punto t_0 , la expresión del potencial complejo del manantial es

$$f(t) = \frac{Q}{2\pi} \ln(t - t_0)$$

c) Torbellino potencial de intensidad Γ situado en el origen de coordenadas

$$U = \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta$$

$$W = -\frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta$$

$$f(t) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln t$$

Si la singularidad en vez de estar centrada en el origen está en un punto t_0 , la expresión del potencial complejo del torbellino es

$$f(t) = i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln(t - t_0)$$

d) Doblete

El doblete es un movimiento combinación de una fuente y un sumidero de la misma intensidad y separados una distancia diferencial.

$$f(t) = \lim_{\Delta t_0 \rightarrow 0} \left(\frac{Q}{2\pi} \ln(t + \Delta t_0) - \frac{Q}{2\pi} \ln(t - \Delta t_0) \right) = \frac{n}{z}$$

Siendo $n = 2\Delta t_0 \frac{Q}{2\pi}$ una constante llamada núcleo del doblete

POTENCIAL DE VELOCIDADES ALREDEDOR DE UN CILINDRO

Vamos a utilizar las soluciones elementales anteriores para calcular el potencial de velocidades alrededor de un cilindro. Si sumamos un torbellino, un doblete y una traslación y aplicando las condiciones de contorno del problema (velocidad tiene que ser tangente al sólido que rodea) obtenemos

$$f(t) = U_0 \left(t - \frac{R^2}{t} \right) + i \frac{\Gamma}{2\pi} \ln t$$

Donde R es el radio del cilindro. Por lo que las velocidades serán

$$U = U_0 \left(1 + \frac{R^2}{r^2} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right) + \frac{\Gamma}{2\pi r} \sin \theta$$

$$W = -U_0 \left(2 \frac{R^2}{r^2} (\sin \theta \cdot \cos \theta) \right) - \frac{\Gamma}{2\pi r} \cos \theta$$

Las siguientes figuras [Figs. 34, 35 y 36] representan el campo fluido alrededor del cilindro para $\Gamma = 0$, $\Gamma < 0$ y $\Gamma > 0$.

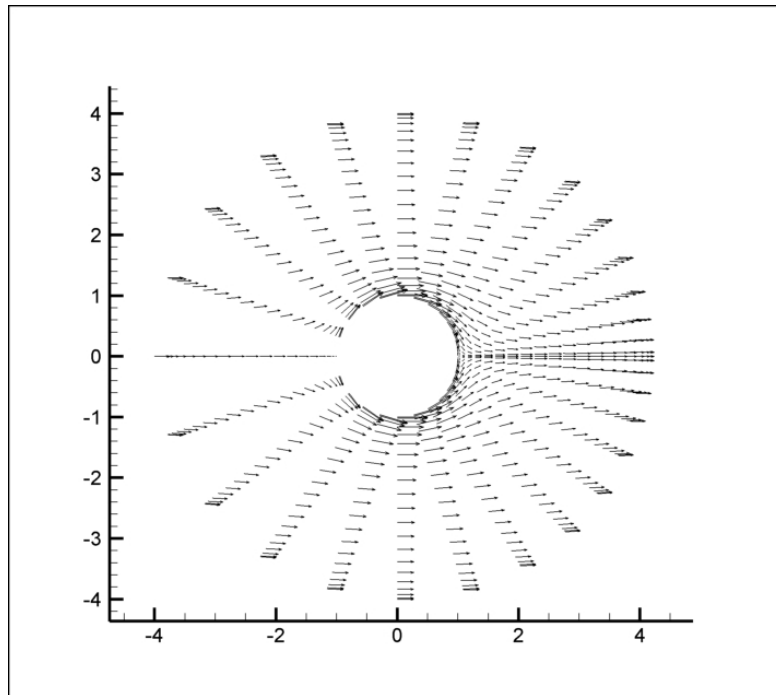


Figura 34 Campo de velocidades para $\Gamma = 0$

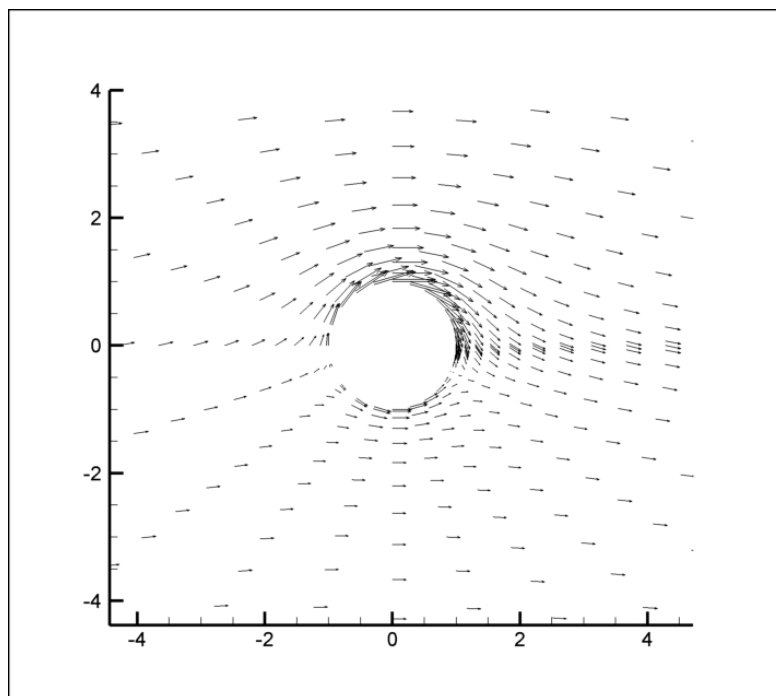


Figura 35 Campo de velocidades para $\Gamma > 0$

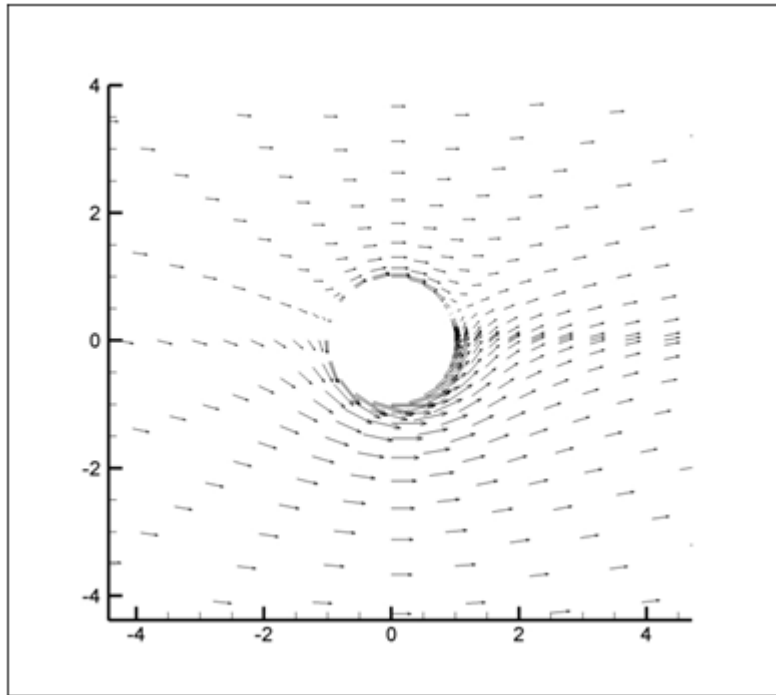


Figura 36 Campo de velocidades para $\Gamma < 0$

5.2.- METODOS DE RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

En este anexo se pretende justificar la elección del método LU y dentro de éste las subrutinas de la librería LAPACK como método de resolución de los sistemas de ecuaciones lineales que han aparecido a lo largo del proyecto. Para ello se presentarán distintos métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales realizando comparaciones entre ellos hasta llegar a la elección final.

INTRODUCCIÓN

Un sistema lineal de n ecuaciones con n incógnitas es de la forma

$$Ax = b$$

Con

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

Donde A es una matriz regular (la solución del sistema existe y es única).

MÉTODOS ITERATIVOS

Los métodos iterativos consisten en aplicar repetidamente un algoritmo en general sencillo y proporcionan la solución exacta sólo como límite de una sucesión de soluciones aproximadas. Para que un método iterativo sea útil debe converger, pero no se considera eficiente a menos que la convergencia sea rápida.

Algunos ejemplos de métodos iterativos son el método de Jacobi o el método de Gauss-Seidel.

Los métodos iterativos quedan descartados porque son en general más lentos que los directos. Estos métodos sólo son preferibles cuando la matriz es poco densa o “sparse” (tiene muchos elementos iguales a cero) en cuyo caso el coste computacional por iteración es pequeño. Las matrices a solucionar en este trabajo no cumplen esa condición.

MÉTODOS DIRECTOS

Los métodos directos proporcionan una solución exacta (en caso de no existir errores de redondeo) en un número finito de pasos mediante el uso de un algoritmo en general complicado.

Trataremos dos métodos directos: el método de eliminación de Gauss y el método de descomposición LU.

MÉTODO DE ELIMINACIÓN DE GAUSS

Este método consta de dos partes:

- Primero, mediante operaciones elementales por filas, se transforma la matriz ampliada $[A|b]$ en una matriz triangular superior, la cual representa un sistema equivalente al de partida.
- Segundo, se resuelve dicho sistema obteniendo las incógnitas en el orden $x_n, x_{n-1}, \dots, x_2, x_1$

Al primer paso se le llama eliminación y al segundo sustitución.

Algoritmo

Para indicar que el elemento a_{ij} ha sido modificado $(k - 1)$ veces se va a utilizar el símbolo $a_{ij}^{(k)}$. Entonces para $k = 1, 2, \dots, n - 1$ se tiene

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}}, \quad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} b_k^{(k)}$$

Donde $i, j = k + 1, k + 2, \dots, n - 1, n$

En este paso hemos conseguido transformar la matriz ampliada en una matriz triangular superior. Para el paso de sustitución se tiene

$$x_n = \frac{b_n^{(n)}}{a_{nn}^{(n)}}$$

$$x_i = \frac{b_i^{(i)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i)} x_j}{a_{ii}^{(i)}}$$

con

$$i = n - 1, n - 2, \dots, 2, 1$$

con lo que el algoritmo queda completo.

En el paso de eliminación, si alguno de los elementos $a_{kk}^{(k)}$, que reciben el nombre de pivotes, se hace cero, el algoritmo falla. Asimismo conviene evitar la situación en que un pivote se hace muy pequeño en valor absoluto comparado con el resto de elementos. La solución a este problema está en pivotar (intercambiar filas). Pivotando siempre se puede llevar a cabo el método de eliminación de Gauss.

MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN LU

El método de Gauss (tal como se ha descrito en la sección anterior) no es muy utilizado en la práctica. Se suele utilizar un método equivalente llamado método de descomposición LU (a lo largo de esta sección se verán las ventajas que presenta este método frente al de Gauss). En el método LU, la matriz A se transforma en un producto de matrices L y U , donde L es triangular inferior y U es triangular superior. Este paso es conocido como de descomposición. El sistema $Ax = b$ puede entonces escribirse como $LUx = b$, o bien $Ly = b$, después de hacer $Ux = y$. La obtención de la solución x consiste pues en resolver primero el sistema triangular $Ly = b$, una vez obtenida y , resolver el sistema también triangular $Ux = y$ (paso de resolución).

En el proceso de descomposición que se estudia a continuación, se multiplican las matrices L y U y se identifica el producto con la matriz A . Esto plantea una indeterminación que se resuelve imponiendo que U tenga unos en su diagonal (método de Crout).

$$\begin{bmatrix} l_{11} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \cdots & u_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Algoritmo

$$l_{i1} = a_{i1}, \quad i = 1, \dots, n$$

$$u_{1j} = \frac{a_{1j}}{l_{11}}, \quad j = 2, \dots, n$$

$$l_{ik} = a_{ik} - \sum_{h=1}^{k-1} l_{ih} u_{hk}, \quad i = k, \dots, n \quad (k = 2, \dots, n-1)$$

$$u_{kj} = \frac{1}{l_{kk}} \left[a_{kj} - \sum_{h=1}^{k-1} l_{kh} u_{hj} \right], \quad j = k+1, \dots, n \quad (k = 2, \dots, n-1)$$

$$l_{nn} = a_{nn} - \sum_{h=1}^{n-1} l_{nh} u_{hn}$$

En este método las matrices L y U pueden almacenarse de forma muy económica dado que no es necesario almacenar los ceros ni los unos, y dado que una vez que un elemento de la matriz A es usado, no se vuelve a usar más, los elementos de las matrices L y U se pueden almacenar, conforme se van obteniendo, en el lugar que ocupa el correspondiente elemento de la matriz A .

Para conseguir el valor del vector de incógnitas x no hay más que realizar una sustitución hacia abajo y otra hacia arriba (como la explicada anteriormente para el método de Gauss).

El proceso de descomposición falla si alguno de los elementos l_{ii} es cero. Para evitar esto, se puede introducir en el algoritmo de descomposición una técnica análoga a la de pivotar del método de Gauss. Sin embargo, ahora la técnica es más laboriosa ya que como en el proceso de obtención de L y de U no interviene b es necesario llevar la cuenta de todos los cambios de filas que se hagan para revertirlos luego en el vector b .

El método LU es computacionalmente más eficiente que el método de Gauss. Además tiene la gran ventaja de que podemos realizar la descomposición una sola vez aunque cambie después el vector de términos independientes. Por estas razones nos decantamos en el proyecto por el método LU

IMPLEMENTACIÓN DEL MÉTODO LU

Durante el desarrollo del proyecto se realizó una comparación entre una subrutina LU programado y optimizado manualmente y las subrutinas de la biblioteca LAPACK (Linear Algebra PACKage): DGETRF que factoriza la matriz y DGETRS que resuelve el sistema una vez que la matriz del mismo esta factorizada.

Los resultados obtenidos fueron:

- En cuanto a la memoria consumida, ambos métodos se movían dentro del mismo orden de magnitud.
- En cuanto al tiempo computacional, el mejor resultado conseguido resolvía el sistema en 10 veces el tiempo de las subrutinas de LAPACK

Por lo que se seleccionó la librería LAPACK como método de resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

6.- BIBLIOGRAFÍA

Canuto, Hussaini, Quarteroni, Zang. Spectral Methods, in Fluid Dynamics. Springer-Verlag.

Quarteroni, Valli. Numerical Approximation of Partial Differential Equations. Springer-Verlag.

Boyd. Chebyshev and Fourier Spectral Methods.

Trefethen. Spectral Methods in Matlab. SIAM

J.D. Lambert. Numerical methods for ordinary differential systems. Wiley & Sons.

Roger Peyret. Spectral methods for incompressible viscous flow. Springer

Marsden . Vectorial Calculus. Tromba Addis

J. Meseguer Ruiz, A. Sanz Andrés. Aerodinámica básica

John D. Anderson, Jr. Fundamentals of aerodynamics

E. de la Fuente Tremps. Cálculo dinámico de estructuras.

D. Rivas Rivas, C. Vázquez Espí. Cálculo numérico I

[Weisstein, Eric W.](http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html) "Fourier Series." From [MathWorld](http://mathworld.wolfram.com/)--A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/FourierSeries.html>

[Weisstein, Eric W.](http://mathworld.wolfram.com/TaylorSeries.html) "Taylor Series." From [MathWorld](http://mathworld.wolfram.com/)--A Wolfram Web Resource.
<http://mathworld.wolfram.com/TaylorSeries.html>

<http://www.monografias.com/trabajos29/polinomio-taylor/polinomio-taylor.shtml>